제 13 장 연습 / 예제문제

연습문제

13-1

13-2

13-3

13-4

13-5

13-6

13-7

13-8

13-9

13-10

13-11

13-12

13-13

13-14

13-15

홈페이지

예제문제

12-4

13-1 부피가 일정한 기체 온도계를 드라이아이스 (-80 ℃) 온도에 맞추었더니 압력이 0.90 atm 이었다. 에틸알코올의 끓는 온도 (78 ℃) 와 물이 끓는 온도에서 이 기체 온도계의 압력은 각각 얼마인가?

풀이

기체의 밀도가 매우 낮은 경우 (이상기체),
기체의 종류에 관계없이 압력비는 일정하다

$$T_D : P_D = T : P \Rightarrow P = \frac{P_D}{T_D} T$$

열역학적 온도

T [K] = T_C + 273.15

P_D : 0.90 atm
T_D : 193.15 K (-80 ℃)

1) 에틸알코올이 끓는 점에서의 압력(P_A)은?

T_A: 351.15 K (+78 ℃)

$$P_A = \frac{0.90 atm}{193.15 K} \times 351.15 K = 1.6\ atm$$

2) 물이 끓는 점에서의 압력(P_W)은?

T_W: 373.15 K (+100℃)

$$P_W = \frac{0.90 atm}{193.15 K} \times 373.15 K = 1.7\ atm$$

13-2 섭씨 온도와 선형 관계에 있는 온도 척도 Z 에 대해 물은 -100 °Z 에서 얼고 300 °Z 에서 끓는다고 한다. 50 °Z 는 섭씨 몇 도 인가?

풀이

두 온도는 선형관계에 있으므로 $Z = \alpha C + \beta$ 을 만족한다.

각각의 온도를 대입하여 상수 α , β 를 구하면

[-100 °Z ⇨ -100 °C
300 °Z ⇨ 100 °C]

$$300 = 100\alpha + \beta$$
$$-100 = 0 \cdot \alpha + \beta$$
$$\Longrightarrow \quad \alpha = 4, \ \beta = -100$$

따라서 Z 온도와 섭씨온도(C) 의 관계는

$$Z = 4C - 100$$

Z=50 를 대입하여 이에 해당하는 섭씨 온도를 구하면

$$C = 38\ ^\circ C$$

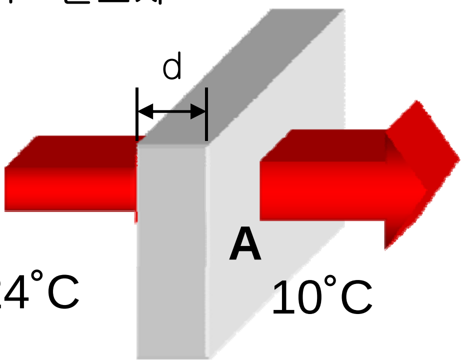
13-3 열전도도 1.366 $J/s \cdot m \cdot ℃$ 인 콘크리트로 만들어진 길이 5.0m 높이 2.5m 두께 20cm인 벽이 있다 벽의 안쪽 면은 24˚C, 바깥 쪽은 10˚C로 유지되면 12시간동안 이 벽을 통하여 얼마만큼의 열량이 빠져 나가겠는가?
(콘크리트의 열전도도 k = 1.366 $J/s \cdot m \cdot ℃$)

풀이

단위 시간에 흐르는 열흐름 (H :단위 시간 Δt 동안 이동한 열량) 의 식은

$$H = \frac{Q}{\Delta t} = k\left(\frac{A}{d}\right)\Delta T \quad (\Delta T : \text{온도차})$$

A : 단면적
d : 두께
ΔT : 온도차



이고 여기서 k 는 열전도도 이다

따라서 Δt 시간(12시간) 동안 빠져나간 전체 열량 은

$$Q = H\,\Delta t = \left(\frac{kA\Delta T}{d}\right)\Delta t$$

$$= (1.366\ J/s \cdot m \cdot {}^{\circ}C)(5.0 \times 2.5\ m^2)(12 \times 3600\ s)\left(\frac{14^{\circ}C}{0.20\ m}\right)$$

$$= 5.2 \times 10^7\ J$$

13-4 물의 밀도는 0 ℃ 에서 약 0.99985 g/cm³ 이며 4 ℃ 에서는 약 0.99997 g/cm³ 이다. 이 온도 범위에서 물의 부피 팽창계수를 근사적으로 계산하라.

풀이

부피팽창계수: $\beta = \dfrac{1}{V}\dfrac{\Delta V}{\Delta T}$

물의 밀도와 부피와의 관계 $\rho = \dfrac{M}{V}$

ρ_0 : 0℃에서의 물의 밀도

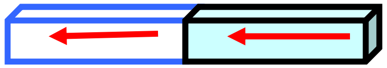
ρ_4 : 4℃에서의 물의 밀도

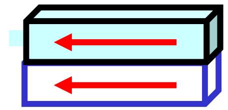
$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{V}\frac{(V_4 - V_0)}{\Delta T} = \frac{\left(\dfrac{V_4}{V_0}\right) - 1}{\Delta T} = \frac{\left(\dfrac{M/\rho_4}{M/\rho_0}\right) - 1}{\Delta T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_4} - 1\right)\frac{1}{\Delta T}$$

$$\beta = \left(\frac{\rho_0}{\rho'} - 1\right)\frac{1}{\Delta T} = \left(\frac{0.99985}{0.99997} - 1\right) \times \frac{1}{4} = -3.00001 \times 10^{-5}$$

13-5 그림과 같이 크기와 모양은 같고 서로 다른 종류의 금속으로 만들어진 막대 A와 B 를 두 가지 방식으로 붙힌다. A의 열 전도도는 B 의 열전도도의 3배이다. 100 cal 가 전달되는데 그림 (a)와 같이 붙였을 때에 2분이 걸렸다면, 그림 (b)와 같이 붙이면 얼마나 걸리는가?

풀이

(a) 0°C  100°C

(b) 0°C  100°C

$$H_{직렬} = H_1 = H_2 = 일정$$

$$H_A = H_B$$

$$3k\frac{A}{d}(T-0) = k\frac{A}{d}(100-T) \Rightarrow T = 25^oC$$

$$H_A = 3k\frac{A}{d}\times 25 = \frac{75kA}{d} = H$$

Δt:직렬일 때의 전달시간

Δt':병렬일 때의 전달시간

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = H \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta Q}{H}}$$

$$H_{병렬} = H_1 + H_2$$

$$H_{병렬} = \frac{3kA}{d}\Delta T + \frac{kA}{d}\Delta T = \frac{4kA}{d}\Delta T = \frac{400kA}{d}$$

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\dfrac{\Delta Q}{H_{병렬}}}{\dfrac{\Delta Q}{H_{직렬}}} = \frac{H_{직렬}}{H_{병렬}} = \frac{\left(\dfrac{75kA}{d}\right)}{\left(\dfrac{400kA}{d}\right)} = \frac{3}{16}$$

$$\therefore \Delta t' = \frac{3}{16}\Delta t = \frac{3}{16}\times(2\,min) = \frac{3}{8}\,min$$

13-6 추운 환경에서 두꺼운 털옷을 입으면 몸의 열 손실은 주로 전도에 의해서만 일어난다. 털옷의 열전도율은 $3.6\times10^{-3}\,cal/m\cdot hr\cdot^{\circ}C$ 라 할 때 1 시간 동안 1.0 ㎡ 면적을 통해 30 ℃ 의 피부에서 -30 ℃ 의 주변 공기로 1.0 ㎝ 두께의 털옷을 통해 전달되는 열은 얼마인가?

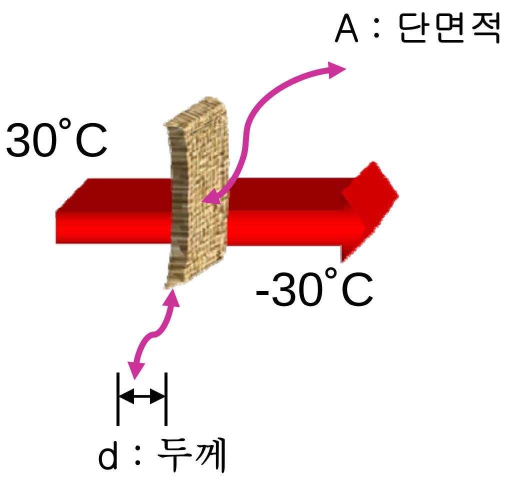
풀이

단위 시간에 흐르는 열흐름 (H :단위 시간 Δt 동안 이동한 열량) 의 식은

$$H=\frac{Q}{\Delta t}=k\left(\frac{A}{d}\right)\Delta T \quad (\Delta T: 온도차)$$

이고 여기서 k 는 열전도도 이다

ΔT : 온도차= 60 ℃



Δt 시간(1시간) 동안 빠져나간 전체 열량

$$Q=H\,\Delta t=\left(\frac{kA\Delta T}{d}\right)\Delta t$$

$$=\left(3.6\times10^{-3}\ \mathrm{cal}/m\cdot hr\cdot^{\circ}C\right)\left(1.0m^{2}\right)\left(\frac{60^{\circ}C}{0.01\,m}\right)(1hr)$$

$$=22cal$$

연습 13-7 길이가 12m이고 철의 성분으로 이루어진 선로가 0 ℃ 에서 설치되었다.
40 ℃ 에서 선로끼리 닿지 않게 하려면 최소 간격은 얼마인가?

0 ℃ 의 온도 때 길이가 12 ㎧ 인 철로가 온도가 40 ℃ 에서 얼마나 늘어나는 길이만큼 간격을 두고 설치해야 함

(철의 선팽창 계수 α = 12 x 10^{-6} /℃)

풀이

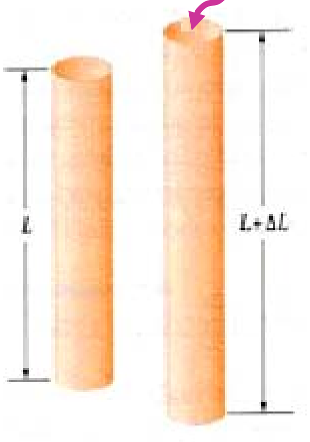
선팽창 계수 $$\boxed{\alpha = \frac{1}{L}\frac{\Delta L}{\Delta T}}$$

$$\Delta L = \alpha\, L_0 \Delta T$$
$$= \{12 \times 10^{-6}\ /^{\circ}C\} \times 12\, m \times (40^{O}C - 0^{O}C) = 5.8 \times 10^{-3}\ m$$

13-8 밀도가 ρ이고 비열이 c 인 금속으로 만든 막대의 단면적이 A 이다. 이 막대의 열팽창계수가 α라면 이 막대에 Q 만큼의 열을 가해줄 때 길이가 얼마나 늘어날 것인지 구하여라.

풀이

A : 단면적



물체가 열에 의한 선팽창계수는 $\alpha = \frac{1}{L}\frac{\Delta L}{\Delta T}$ 이고

막대의 길이 : L
막대가 열에 의해 늘어난 길이 ΔL

막대는 가해진 열량은 물체의 온도변화와 물체의 질량과 물체의 비열에 비례하므로 $(Q = mc\Delta T)$

$$\Delta T = \frac{Q}{mc}$$

따라서 막대가 늘어난 길이 ΔL

$$\Delta L = \alpha\, L\Delta T = \alpha\, L\left(\frac{Q}{mc}\right) = \alpha\, L\left(\frac{Q}{\rho ALc}\right) = \frac{\alpha Q}{\rho Ac} \quad \Leftarrow (m = \rho V = \rho AL)$$

연습 13-9 부피 V 가 온도에 의존한다면 질량 밀도 ρ 역시 온도에 의존한다. 온도 변화량 ΔT 에 의한 질량밀도의 변화량 Δρ 는 아래 식과 같다. 여기서 Δρ 는 아래와 같은 식이 됨을 보여라. 여기서 β는 부피 팽창계수이다. 음의 부호 (-) 를 설명하시오.

$$\Delta\rho = -\beta\rho'\Delta T$$

풀이

부피팽창계수: $\beta = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T}$

물의 밀도와 부피와의 관계 $\rho = \frac{M}{V}$

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{V}\frac{(V'-V)}{\Delta T} = \frac{\left(\frac{V'}{V}\right)-1}{\Delta T} = \frac{\left(\frac{M/\rho'}{M/\rho}\right)-1}{\Delta T} = \left(\frac{\rho}{\rho'}-1\right)\frac{1}{\Delta T} = \frac{(\rho-\rho')}{\rho'\Delta T}$$

$$\rho - \rho' = -\beta\rho'\Delta T$$

$$\therefore \Delta\rho = -\beta\rho'\Delta T$$

– 부호: 온도 증가에 따라 밀도 감소한다

13.10을 풀기 위해 알아 두어야 할 내용

이상 기체의 상태 방정식

$$\boxed{PV = N k_B T = nRT}$$

n : 기체의 몰(mol) 수

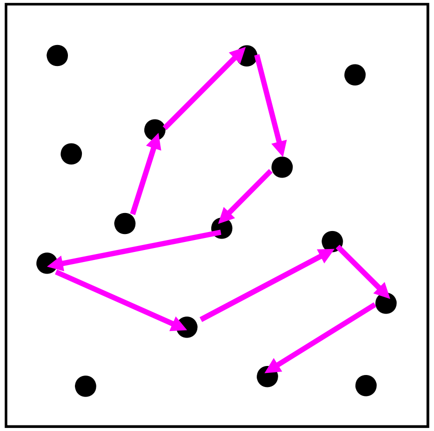
$R = N_A k_B = 8.31$ [J/(mol K)] (기체의 상수)

$N_A = 6.02 \times 10^{23}$ [/mole]

$k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ [J/K] : 볼쯔만 상수

$$N k_B = nR, \qquad N_A = \frac{N}{n}$$

평균 자유거리 (mean free path) :



평균 자유거리 : 충돌과 충돌 사이에
무작위적으로 자유로이 움직이는 거리

실온과 실압에서 보통 기체의 경우 :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V}$$

$\begin{cases} d & \text{: 입자의 평균 지름} \\ N/V & \text{: 기체의 밀도} \end{cases}$

(실온과 실압 하에서의 입자 평균 속력 ≈ 1 km/s)

13-10 지름이 2.0 x 10^{-10} m 인 입자들이 이상기체의 상태방정식을 따른다고 하자. 이 입자들이 1.0 x 10^{-3} N/m^2 의 압력에서 20m 이상의 평균 자유거리를 가지려면 온도가 얼마 이상이어야 하는가?

풀이

입자의 평균자유거리 :

$$\begin{cases} d & \text{: 입자의 평균 지름} \\ N/V & \text{: 기체의 밀도} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 \rho}$$

$$\therefore \rho = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 \lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi \left(2.0 \times 10^{-10}\right)^2 20} = 2.82 \times 10^{17} / m^3$$

이상기체의 상태방정식에서 :

$$PV = N k_B T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{PV}{N k_B} = \left(\frac{V}{N}\right)\frac{P}{k_B} = \left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{P}{k_B} \qquad \left(k_B = 1.38 \times 10^{-23}\ \text{[J/K]}\right)$$

$$\therefore T = \frac{P}{\rho k_B} = \frac{1.0 \times 10^{-3} N/m^2}{\left(2.82 \times 10^{17} / m^3\right)\left(1.38 \times 10^{-23} J/K\right)} = 260 K$$

13-11 식 (13. 19) 로부터 부분율이 최대가 되는 (1) 속력 v_p 와 (2) 단순평균속력 $\bar{v}$ 를 구하여라.

풀이

$$P(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \quad (13.19)$$

(1) 부분율이 최대가 되는 속력 v_p

(13.19)식은 속력이 v + dv 사이의 값을 갖는 입자들의 부분율을 나타내며 따라서 부분율이 최대가 되는 속력 v_p 는 (13.19)을 v로 미분해서 0 을 만족하는 속력값이다.

$$P(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

$$\frac{\partial P(v)}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}\right)_{v=v_p} = 0 \;\Rightarrow\; \left(2v_p - \frac{m{v_p}^3}{k_B T}\right)\cdot e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} = 0$$

$$\therefore v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

13-11 식 (13. 19) 로부터 부분율이 최대가 되는 (1) 속력 v_p 와 (2) 단순평균속력 $\bar{v}$ 를 구하여라.

풀이

$$P(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \quad (13.19)$$

(2) 단순 평균 속력은 (13.19)에 v 를 곱하여 적분해서 얻어진다.

$$\bar{v} = \int_0^\infty vP(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \cdot v dv \quad \Leftarrow \left(\begin{array}{l} v^2 = \dfrac{2k_B T x}{m} \Rightarrow x = \dfrac{mv^2}{2k_B T} \\ v dv = \dfrac{k_B T}{m} dx \Rightarrow dx = \dfrac{mv dv}{k_B T} \end{array}\right)$$

$$= 8\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \left(\frac{k_B T}{m}\right)^2 \int_0^\infty x e^{-x} dx = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \underline{\int_0^\infty x e^{-x} dx} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

$\int_0^\infty x e^{-x} dx$ 를 부분적분하면 $\left(\int_0^\infty x e^{-x} dx = \cancel{-xe^{-x}\Big|_0^\infty} + \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1\right)$

13-12 상온 (300K) 1기압 에서 공기중의 질소 분자와 산소 분자의 제곱평균제곱근 속력을 각각 구하여라

풀이

분자들은 평균적으로 $\frac{3}{2}k_BT$ 의 운동에너지를 가지므로 제곱 평균 제곱근 속력 은

$$\frac{1}{2}mv_{rms}^2=\frac{3}{2}k_BT \Rightarrow v_{rms}=\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$$

$$k_B = 1.38\times10^{-23}\ [\mathrm{J/K}]$$

질소분자(N_2)

질소분자의 그램분자량 : 28g (1몰의 질소분자의 질량)

질소분자(N_2)의 질량 : $m_{N_2}=\left(\frac{2.8\times10^{-2}kg}{1mol}\right)\left(\frac{1mol}{6\times10^{23}}\right)=4.6\times10^{-26}kg$

$$v_{rms}=\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}=\sqrt{\frac{3\times1.38\times10^{-23}(J/K)\times300K}{4.6\times10^{-26}kg}}=5.2\times10^2m/s$$

산소분자(O_2)

산소분자의 그램분자량 : 28g (1몰의 질소분자의 질량)

산소분자(O_2)의 질량 : $m_{O_2}=\left(\frac{3.2\times10^{-2}}{1mol}\right)\left(\frac{1mol}{6\times10^{23}}\right)=5.3\times10^{-26}m/s$

$$v_{rms}=\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}=\sqrt{\frac{3\times1.38\times10^{-23}(J/K)\times300K}{5.3\times10^{-26}kg}}=4.8\times10^2m/s$$

13.13을 풀기 위해 알아 두어야 할 내용

기체의 총 운동 에너지 [단원자 분자 기체]

- N 개의 단원자 분자로 이루어진 기체의 경우

$$\left(P = \frac{Nmv_{rms}^2}{3V} \right)$$

$$K = \frac{Nmv_{rms}^2}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{Nmv_{rms}^2}{3} \right) = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}N\,k_B T = \frac{3}{2}nRT$$

$$\boxed{K = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}nRT}$$

분자 1 개당 평균 (병진) 운동에너지 $= \frac{3}{2}k_B T \quad \left[= \frac{3}{2}RT \right]$

16

13-13 1.000 K 에서 수소 분자들의 평균 병진운동에너지는 몇 J 인가?

풀이

분자들은 평균적으로 $\frac{3}{2}k_BT$ 의 운동에너지를 가지므로 평균 병진운동에너지는

$$\frac{1}{2}mv_{rms}^2 = \frac{3}{2}k_BT = \frac{3}{2}\left(1.38\times10^{-23}J/K\right)\left(1.00\times10^{3}K\right) = 2.07\times10^{-20}J$$

$\left(k_B = 1.38\times10^{-23}\ [\mathrm{J/K}]\right)$

- N 개의 분자로 이루어진 기체의 경우

$$K = \frac{Nmv_{rms}^2}{2} = N\left(\frac{3}{2}k_BT\right) = \frac{3}{2}nRT$$

13-14 어떤 이상기체를 부피에 따른 압력의 변화가 p=αV² 이 되도록 하면서 팽창시킨다. 부피가 두 배로 팽창했다면 온도는 몇 배로 되었겠는가?

풀이

이상기체의 상태방정식에서 :

$$\frac{PV}{T} = N\,k_B = \text{일정} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha V^3}{T} = \text{일정} \quad \left(P = \alpha V^3\right)$$

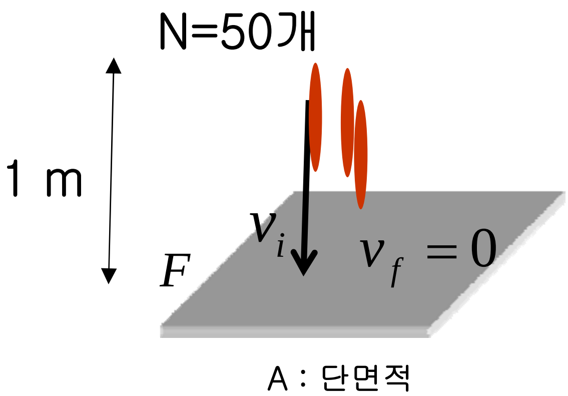
$$\frac{V_1^{\,3}}{T_1} = \frac{V_2^{\,3}}{T_2} \Rightarrow T_2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^3 T_1 = 8T_1 \qquad \Leftarrow \left(V_2 = 2V_1\right)$$

온도는 8배로 증가한다.

13-15 모래알 하나의 질량이 0.002 g 이라고 하자. 모래를 1 m 높이에서 떨어뜨리고 떨어진 모래알은 바닥에서 정지한다고 하자. 1초에 50개의 모래알이 1 cm^2 면적의 바닥에 떨어진다고 할 때 모래가 바닥에 가하는 압력은 얼마인가?

풀이

모래에 의한 충격력



$$v_i = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 m/s^2 \times 1m} = 4.4 m/s \Rightarrow v_f = 0$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = N\frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{50 \times 2 \times 10^{-6} kg \times 4.4 m/s}{1s} = 4.4 \times 10^{-4} N$$

바닥에 작용하는 압력

$$\boldsymbol{P = \frac{F}{A} = \frac{4.4 \times 10^{-4} N/m^2}{1 \times 10^{-4} m^2} = 4.4 \times 10^{-4} N/m^2 = 4.4 Pa}$$

예제 12-4 10g 의 소총탄이 1 kg의 파라핀 왁스(비열은 0.7cal/g ℃ 이다) 안으로 2000m/s 의 속도로 달려와 박혔다. 왁스의 처음 온도는 20 ℃ 이다. 모든 소총탄의 에너지가 왁스에 열로 전달된다면 왁스의 최종 온도는 얼마인가?

풀이

파라핀(M)이 무거워 소총탄(m)이 박힌 후 되튐에 의한 운동에너지는 거의 무시할 수 있다.

운동량 보존

$$mv = (M+m)V$$

$$\because (M >> m)$$

$$\frac{(\text{충돌후KE})\ KE_f}{(\text{충돌전KE})\ KE_i} = \frac{\frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2}{(m+M)^2}v^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{m}{(m+M)} \approx 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times(10^{-2}\,kg)\times(2\times10^3\,m/s)^2 = 2\times10^4\,J\left(\frac{1\,cal}{4\,J}\right) = 5000\ cal$$

$$\therefore \Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{5000\ cal}{1000\ g\times0.7\,cal\ /\ g^\circ C} = 7^\circ C$$

파라핀의 최종 온도 : 20 ℃ + 7 ℃ =27 ℃