제 12 장 연습 / 예제문제

연습문제

12-1

12-2

12-3

12-4

12-5

12-6

12-7

12-8

12-9

12-10

12-11

12-12

12-13

12-14

12-15

홈페이지

예제문제

11-2

11-4

11-10

연습 12-1 다음의 식들이 모두 같은 것임을 보여라

진행파의 형태는 $k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \omega = \frac{2\pi}{T},\ v = \frac{\omega}{k}$ 등의 공식을 이용하여 다음과 같이 여러 형태로 쓸 수 있다.

풀이

$$y = A\cos(kx - \omega t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)$$

$$y = A\cos k(x - vt) = A\cos\omega\left(\frac{x}{v} - t\right) = A\cos\left(kx - \frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$y = A\cos(kx - \omega t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)$$

$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$ $\boxed{T = \frac{1}{f}}$ 을 대입한다

$$y = A\cos k(x - vt) = A\cos kv\left(\frac{x}{v} - t\right) = A\cos\omega\left(\frac{x}{v} - t\right) = A\cos\left(\frac{\omega x}{v} - \omega t\right) = A\cos\left(kx - \frac{2\pi t}{T}\right)$$

$v = \frac{\omega}{k},\quad \omega = kv$ $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$

을 대입하여 구한다.

연습 12-2 선 질량밀도가 $1.6 \times 10^{-4}\ kg\ /\ m$ 인 줄을 따라 전파되고 있는 횡파의 식이 $y(x,t) = 0.020\ \sin\ (2.0x + 30t)$ 로 주어졌으며 x 와 y 의 단위는 m 이고 t 의 단위는 s 이다 .

풀이

(가) 파동의 속력을 구하여라

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{30}{2.0} = 15\ m/s$$

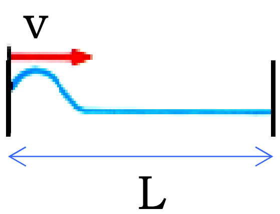
(나) 줄의 장력을 구하여라

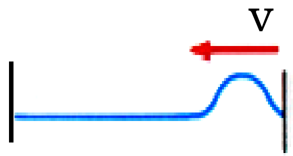
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

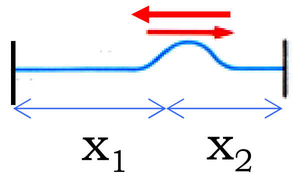
$$\Rightarrow F = \mu v^2 = \left(1.6\times10^{-4}\,kg/m\right)\left(15m/s\right)^2 = 0.036N$$

연습 12-3. 두 벽 사이에 질량이 $2.0 \times 10^{2}\, g$ 이고 장력이 $5.0 \times 10\, N$ 이며 길이가 $1.0 \times 10\, m$ 의 줄이 매어져 있다. 시각 t = 0.0 초에 왼쪽 끝점에서 펄스를 오른쪽으로 보내고 시각 t=0.10 초에 오른쪽 끝점에서 펄스를 왼쪽으로 보내면 두 펄스는 언제 만나는지 시간을 구하여라.

풀이 두 진행펄스의 속도는 같으며 왼쪽에서 진행한 펄스가 움직인 거리(x_1)와 오른쪽에서 진행한 펄스의 거리 (x_2) 가 같을 때 만난다.







$$x_1 = x_2$$

줄의 밀도 $\mu = \dfrac{m}{L} = \dfrac{2.0 \times 10^{-1} kg}{1.0 \times 10 m} = 2.0 \times 10^{-2} kg/m$ 진행펄스의 속도: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{5.0 \times 10 N}{2.0 \times 10^{-2} kg}} = 50 m/s$

왼쪽 펄스가 t 시간 동안 진행한 거리는 $x_1 = vt$

오른쪽 펄스가 0.10 초 후에 t 시간 동안 진행한 거리는 $x_2 = L - v(t - 0.10)$

두 펄스가 만나게 되므로 $x_1 = x_2 \Rightarrow vt = L - v(t - 0.10)$

만나는 시간은 $t = \dfrac{L}{2v} - \dfrac{0.10}{2} = \dfrac{1.0 \times 10}{2 \times 50} - 0.05 = 0.15\, s$

연습 12-4 진폭, 파장, 주기는 같고 초기 위상 상수 Δϕ 가 만큼 다른 두 진행 파동이 만드는 간섭파동을 생각하자. 간섭파동의 진폭이 두 진행파동 각각의 진폭과 같다면 cos Δϕ 는 얼마인가?

풀이 위상이 다른 두 진행파

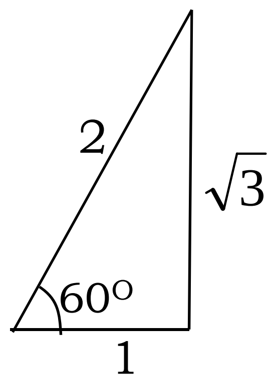
$$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$$
$$y_2 = A\sin(kx - \omega t - \Delta\phi)$$

두 진행파를 중첩하면

$$y = y_1 + y_2 = \left(2A\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right)\sin(kx - \omega t - \frac{\Delta\phi}{2})$$

간섭파동의 진폭이 진행파의 진폭과 같으므로

$$\text{진폭} = 2A\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = A$$

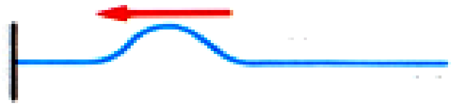


$$\Rightarrow \cos\frac{\Delta\phi}{2} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \therefore\ \phi = 120^\circ \pm m \times 360^\circ$$

$$\therefore \cos\Delta\phi = -\frac{1}{2}$$

연습 12-5 x ≥0 인 영역에 존재하는 무한히 긴 줄의 끝이 x = 0 지점에 고정되어 있다. 이 줄에 왼쪽으로 진행하고 변위가 $y(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$로 주어지는 진행파가 존재한다면 x = 0 지점에서 반사되어 생성된 반사파의 변위는 어떻게 주어지겠는가? 만약 x = 0 지점에서 줄이 고정되어 있지 않고 자유롭게 위아래로 움직일 수 있다면 반사파의 변위는 어떻게 달라지겠는가?

풀이

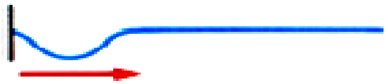


$$y(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

(가) 고정단에서 반사된 반사파

오른쪽으로 진행하므로 진폭이 - 가 되므로

$$y(x,t) = -A\sin(kx - \omega t)$$



(나) 자유단에서 반사된 반사파

오른쪽으로 진행하며 진폭이 + 로 변함이 없다

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

연습 12-6 진동하는 줄의 정상파가 $y(x,t) = 0.50 \sin(\frac{\pi}{3}x) \cos(\frac{\pi}{2}t)$ 로 주어졌으며 x 와 y 의 단위는 cm 이고 t 의 단위는 s 이다.

(가) 이 정상파를 만들기 위한 두 진행 파동의 식을 구하여라

풀이

진행방향이 반대인 두 개의 파가 합쳐지면 정상파가 되므로 두 파의 식을 y_1, y_2 라 두고 합성파를 비교한다

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t), \quad y_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

합성파 : $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$

$$= 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

$y(x,t) = 0.50 \sin(\frac{\pi}{3}x) \cos(\frac{\pi}{2}t)$ 와 비교하면 $k = \frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $2A = 0.50 \rightarrow A = 0.25$

두 파동은 $\therefore\ y_1(x,t) = 0.25\sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}t\right)$, $y_2(x,t) = 0.25\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}t\right)$

풀이

(나) 각 파동의 진폭, 파수, 속력, 주파수, 진동수, 주기는?

$$\text{진폭} \quad A = 0.25\,cm\ , \quad \text{파수} \quad k = \frac{\pi}{3}, \quad \text{속력} : \mathrm{v} = \frac{\omega}{k} = \frac{3}{2}\,cm\ /\ s$$

$$\text{주파수} \ : f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4}(\sec^{-1}), \quad \text{주기} : \ T = \frac{1}{f} = 4\sec$$

(다) 정상파 마디 사이의 거리? $\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\pi/3} = 3 \quad (cm)$

정상파의 마디는 파장의 반정수배이다.

(라) x=2.0 cm인 곳에서 t=3.0s 일 때 파동의 속력은 얼마인가?

정상파 $\boldsymbol{y(x,t) = 0.50\sin(\frac{\pi}{3}x)\cos(\frac{\pi}{2}t)}$ 를 미분하면 속력식이 되므로

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -0.5(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{3}x)\sin(\frac{\pi}{2}t)\Big|_{\substack{t=3.0\\x=2.0}} = 0.68\,cm/s$$

연습 12-7 사람이 들을 수 있는 음파의 주파수는 약 20 Hz 에서 20000 Hz 까지 이다. 음파의 파장은 얼마나 변하는가?.

풀이

파장과 진동수의 관계는 역수 관계에 있다.

$$v = \frac{\lambda}{T}, \qquad \lambda = vT = \frac{v}{f}$$

$$\lambda_{20\,Hz} = \frac{v}{f} = \frac{340\,m/s}{20\,Hz} = 17\,m$$

$$\lambda_{20000\,Hz} = \frac{v}{f} = \frac{340\,m/s}{20000\,Hz} = 0.017\,m \quad (1.7\,cm)$$

연습 12-8 진행하는 음파의 압력 식이 $\Delta p = 1.5 \sin \pi(2x - 330t)$ 로 주어졌으며 압력의 단위는 Pa, t 의 단위는 s 이다.

풀이 $\Delta p = p_m \sin(kx - \omega t)$ 와 비교하면 $p_m = 1.5$, $k = 2\pi$, $\omega = 330\pi$ 이다.

(가) 압력파의 진폭을 구하여라

p_m=1.5 pa

(나) 주파수를 구하여라

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{330\pi}{2\pi} = 165 \ Hz$$

(다) 파장을 구하여라

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \ m$$

(라) 속력을 구하여라 $v = \frac{\omega}{k} = \frac{330\pi}{2\pi} = 165 \ (m/s)$

연습 12-9 진동수 500 Hz 를 내는 작은 스피커 A, B 가 관측자와 일직선 상에 놓여 있다. 관측자가 두 스피커에서 나오는 소리를 듣지 못했다면 두 스피커 사이의 거리는 얼마이어야 하는가? 공기 중의 온도는 섭씨 25도 이다

풀이

섭씨 25도의 음파의 속도를 구하고 음파의 파장을 구한다.

$$\Rightarrow v = 331 + 0.6t = 331 + 0.6 \times 25 = 346m/s$$

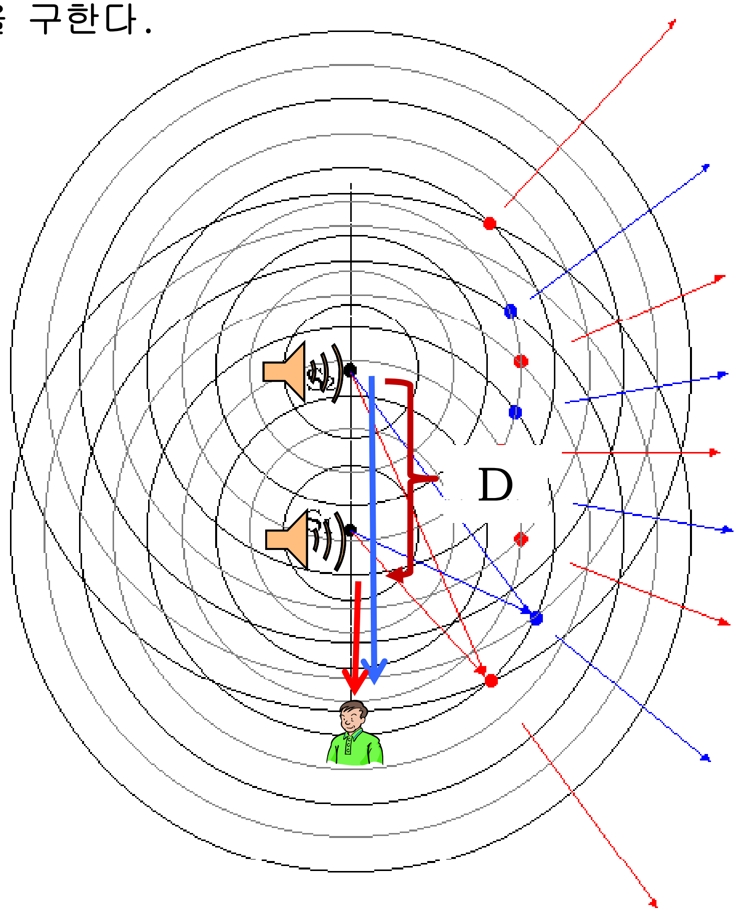
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{346m/s}{500s^{-1}} = 0.692m$$

소리를 듣지 못했으므로 두 음파는 경로차에 의해 소멸간섭이 된 경우이다.

소멸간섭 ⟶ 경로차 $= \frac{\lambda}{2}$의 홀수배

$$D(\text{거리}) = \frac{\lambda}{2}(2n+1) = 0.346(2n+1) \quad (:0,1,2,3\ ...)$$

0.346m, 1.038m, ...

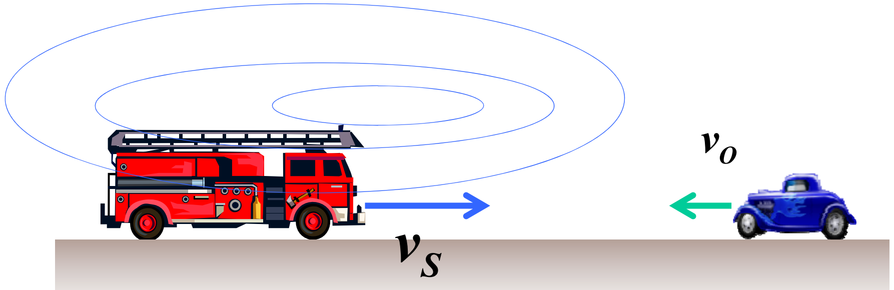


연습 12-10 소방차가 100 km/h 의 속도로 1.0kHz 의 사이렌을 울리면서 다가오고 있다. 60 km/h 의 속도로 소방차를 향해 달리는 자동차에 타고 있는 관측자가 듣는 진동수는 얼마인가? 공기의 온도는 25˚C 이다.

풀이

도플러효과의 공식 $f' = f\dfrac{v+v_O}{v-v_S}$

음원의 속력 : v_s
관측자의 속력 : v_o



$$v = 331 + 0.6t = 331 + 0.6\times 25 = 346m/s$$

$$v_0 = 100\left(\frac{km}{h}\right)\left(\frac{10^3 m}{1km}\right)\left(\frac{1h}{3600s}\right) = 27.8m/s$$

$$v_s = 60\left(\frac{km}{h}\right)\left(\frac{10^3 m}{1km}\right)\left(\frac{1h}{3600s}\right) = 16.7m/s$$

관측자가 음원에 가까워짐

$$f' = f\frac{v+v_O}{v-v_S} = 1000\times\frac{346+16.7}{346-27.8} = 1.139Hz = 1.1kHz$$

음원이 가까워짐

연습 12-11 두 대의 기차가 서로 마주 보고 각각 지면에 대해서 40 m/s 의 속력으로 움직이고 있다. 한 기차에서 진동수가 500Hz 인 소리를 내고 있다. 공기 중의 온도는 섭씨 25도 이다

(가) 다른 기차에서 들리는 진동수는?

공기중 소리의 속력 :

$$\Rightarrow v = 331 + 0.6T = 331 + 0.6 \times 25 = 346 m/s$$

풀이

$$f' = f\frac{v + v_O}{v - v_S} = 500 \times \frac{346 + 40}{346 - 40} = 631 Hz$$

음원의 속력 : $\boldsymbol{v_s = 40 m/s,}$

관측자의 속력 : $\boldsymbol{v_o = 40 m/s,}$

(나) 만일 관측하는 기차에서 소리를 내는 기차쪽으로 바람이 40m/s 로 분다면 다른 기차에서 들리는 소리의 진동수는?

바람의 효과로 관측자가 느끼는 음파의 속력은 $v - v_w$ 이다. (v_w=−40m/s)

$$f' = f\frac{v - v_w + v_O}{v - v_w - v_S} = 500 \times \frac{(346 - 40) + 40}{(346 - 40) - 40} = 650 Hz$$

(다) (나)의 경우 바람의 방향이 반대라면 다른 기차에서 들리는 소리의 진동수는 얼마인가?

바람의 효과로 관측자가 느끼는 음파의 속력은 $v + v_w$ 이다 (v_w=40m/s)

$$f' = f\frac{v + v_w + v_O}{v + v_w - v_S} = 500 \times \frac{(346 + 40) + 40}{(346 + 40) - 40} = 616 Hz$$

연습 12-12 x 축을 따라 $y = 0.10\cos(0.79x - 13t - 0.89)$ 로 표현되는 진행 파가 있다. 여기서 길이의 단위는 m 이고 시간의 단위는 초이다.

(가) 정상파를 만들기 위해서는 어떤 파동을 더해야 하는가?

풀이

정상파를 만드려면 진행방향이 반대방향이고 위상이 같은 파를 더하면 된다.

$$y_1(x,t) = 0.10\cos(0.79x - 13t - 0.89)$$

$$\boxed{y_2(x,t) = 0.10\cos(0.79x + 13t - 0.89)}$$

합성파: $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

$$= 0.10\cos(0.79x - 13t - 0.89) + 0.10\cos(0.79x + 13t - 0.89)$$

$$= 2\times 0.10\cos(0.79x - 0.89)\cos(13t)$$

(나) 정상파가 생겼을 때 줄의 움직임이 가장 큰 x 의 위치를 구하여라.

진폭이 최대인 점은 코사인 값이 최대인 점을 구하면 된다

$$\cos(0.79x - 0.89) = \pm 1$$

$$\Rightarrow 0.79x - 0.89 = n\pi \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

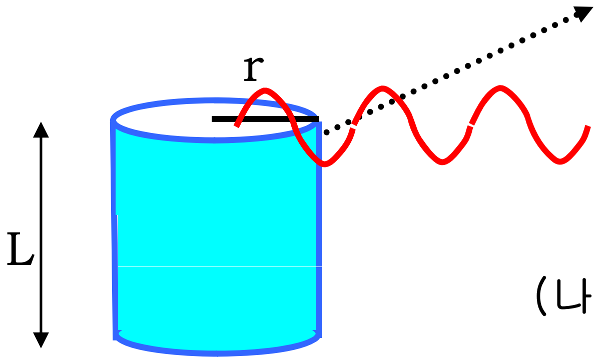
$$\therefore x = \frac{n\pi + 0.89}{0.79} = \frac{3.14}{0.79}n + 1.1 \cong 4n + 1.1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

연습 12-13 선형파원이 원통형으로 퍼져 가는 파를 생성하고 있다.

(가) 진폭은 파원으로 부터 거리에 어떻게 의존하는가?

파동의 세기는 파동의 진폭에 비례한다. $I \propto (y_m{}^2)$

풀이



$$y_m{}^2 \propto \frac{E_0(t=0\text{에서의 에너지})}{(\text{단면적})\cdot(\text{시간})} = \frac{(\text{에너지}/\text{시간})}{(2\pi rL)}$$

$$\therefore\ y_m \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

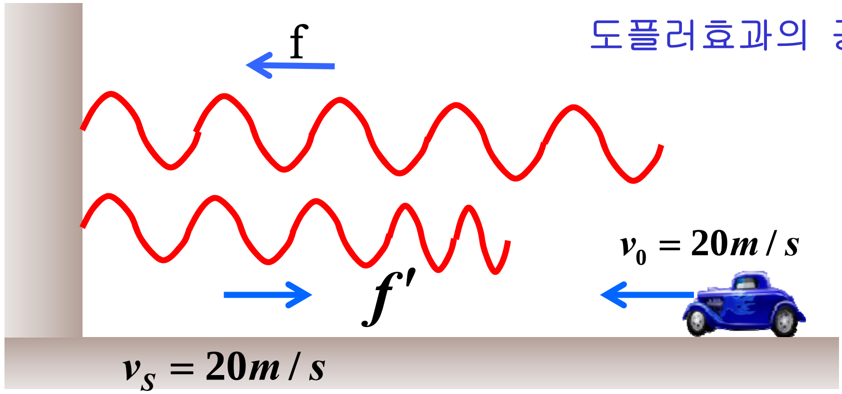
(나) 세기는 파원으로 부터 거리에 어떻게 의존하는가?

$$I = \frac{\text{에너지}}{\text{단면적}\cdot\text{시간}} = \frac{\text{에너지}/\text{시간}}{(2\pi rL)}$$

$$\therefore\ I \propto \frac{1}{r}$$

연습 12-14 음파발생장치를 장착한 자동차가 $2.0 \times 10\ m/s$의 속력으로 벽면을 향해 등속도운동을 하면서 진동수 $1.0 \times 10^5\ Hz$의 음파를 발생시킨다. 이 음파가 벽에 의해 반사된 후 원래의 음파와 간섭하여 만드는 맥놀이 진동수는 얼마인가?

풀이



도플러효과의 공식 $f' = f\dfrac{v+v_O}{v-v_S}$

음원의 속력 : v_s
관측자의 속력 : v_o

$$v = 340m/s$$

벽면에서 반사된 파는 20 m/s 로 관측자에 가까워지고 관측자도 벽면을 향하여 20m/s 로 접근하고 있으므로 관측자에게 들리는 반사파의 진동수는

$$f' = f\frac{v+v_O}{v-v_S} = 1.0\times10^5\,Hz\times\frac{340+20}{340-20} = 112500\,Hz$$

반사된 파와 원래 음파의 진동수가 만드는 맥놀이 진동수 : (두 진동수의 차)

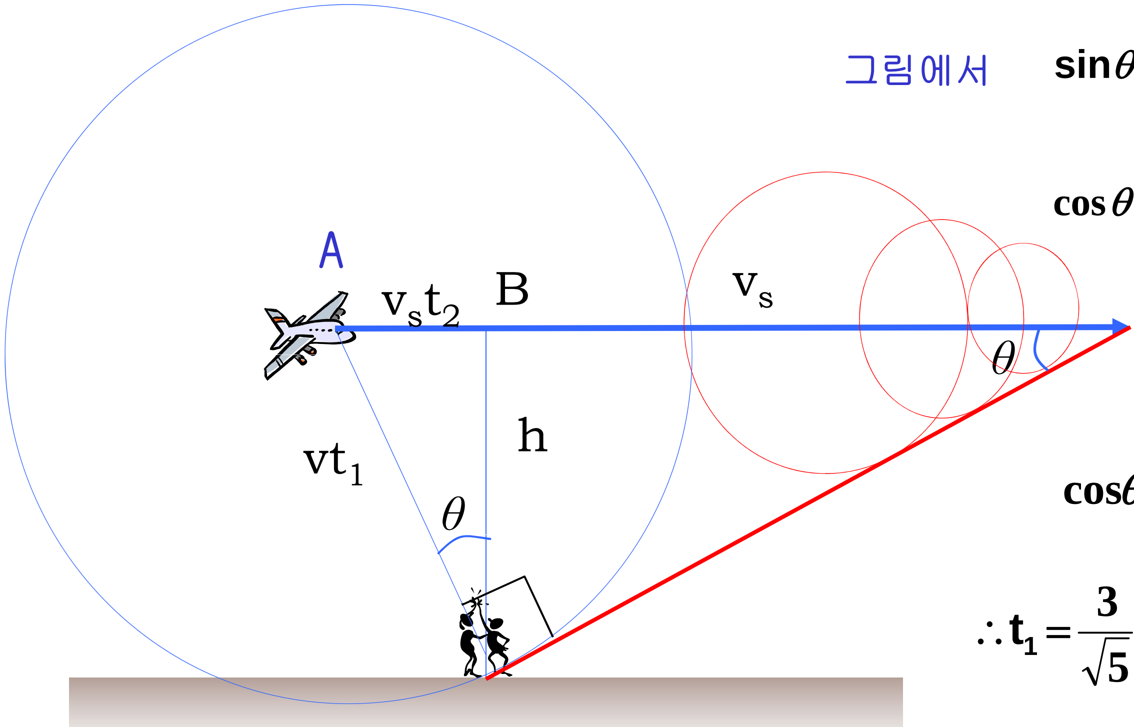
$$|f' - f| = 112500 - 100000 = 12500\,Hz = 1.3\times10^4\,Hz$$

연습 12-15 지상에서 $6.0\times10^{3}\,m$ 높이에서 음속의 1.5 배로 비행기가 지나갔다면 몇 초 뒤에 충격음파를 들을 수 있겠는가?

풀이

A 위치에서 지상까지 비행기의 충격파가 도달하는 시간을 t_1 라 하고

A 에서 지상의 수직높이 B 까지 도달하는 시간을 t_2 라 하자.



그림에서 $\sin\theta=\dfrac{v}{v_s}=\dfrac{v}{1.5v}=\dfrac{2}{3}$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos\theta=\frac{h}{vt_1}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore t_1=\frac{3}{\sqrt{5}}\left(\frac{h}{v_s}\right)=\frac{3}{\sqrt{5}}\left(\frac{6{,}000m}{340m/s}\right)=23.7s$$

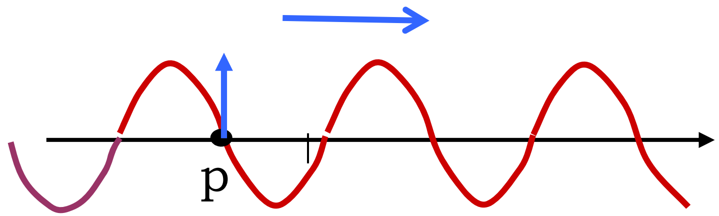
$$\sin\theta=\frac{v_s t_2}{vt_1}\Rightarrow\ t_2=\left(\frac{v}{v_s}\right)\sin\theta\cdot t_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2 t_1=\frac{4}{9}\times23.7=10.5s$$

h 높이에서 충격음파를 들을 수 있는 시간 t 는 t_1 - t_2 이다.

$$\therefore t=t_1-t_2=23.7-10.5=13.3s=13s$$

예상 11-2 아래 그림과 같이 매질 안에서 왼쪽에서 오른 쪽으로 진행하는 횡파가 있다. 점 P 에서의 순간 속도 방향은 무엇인가?

풀이

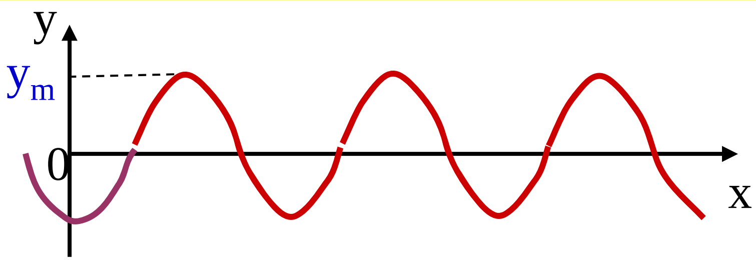


왼쪽을 따라 같은 형태로 진동하면서 진행하므로 P점은 위로 올라가게 된다.

(윗쪽 방향)

예상 11-4 줄을 따라 진행하는 횡파가 진동수 **100Hz,** 파장 **0.040m,** 진폭 **2.0mm**인 사인파로 주어질 때**,** 줄 위의 어떤 한 점에서 가질 수 있는 최대 가속도 **(m/s²)**는 얼마인가**?**

풀이



$$y_m = 2.0 \times 10^{-3} m$$
$$f = 100 Hz = 100 s^{-1}$$
$$\omega = 2\pi f$$

사인파를 미분하여 속도와 가속도의 식을 구하면 각 식에서 최대값은 진폭값들이다.

$$y(t) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)$$
$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t - \phi)$$
$$a(t) = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t - \phi)$$

최대가속도 $a_{max} = -\omega^2 y_m = (2\pi f)^2 y_m$

$$= (2\pi \times 100 s^{-1})^2 \cdot (2.0 \times 10^{-3} m) = 790 m/s^2$$

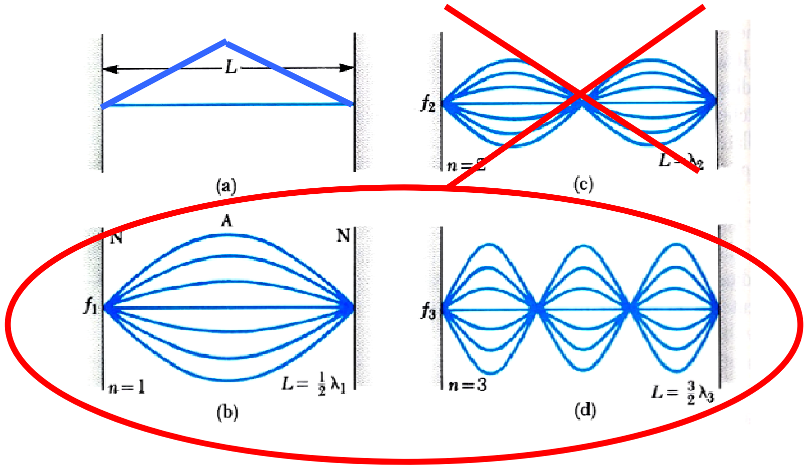
예상 11-10 길이가 1.0 m인 신축성이 있는 줄이 있다. 이 줄의 양쪽 끝은 벽에 고정되어 있다. 이 때, 줄의 중앙을 아래 그림과 같이 잡아 당겼다가 놓을때 형성되는 가장 긴 세개의 파장은?

풀이

정상파가 일어나는 조건은 kL= nπ (n : 정수)이지만 그 중에 줄의 가운데 부분이 최대 진폭이 일어나는 경우는 n 이 홀수인 경우만 해당함.

n=짝수 이면 가운데 부분에서 소멸

n=홀수 이면 가운데 부분에서 보강



$$k_m L = (2m+1)\pi \qquad (\mathrm{m} = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\therefore\ \lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = \frac{2L}{(2m+1)}$$

$$\lambda_0 = 2L = 2.0 \qquad (\text{단위}: \text{meter})$$

$$\lambda_1 = \frac{2L}{3} = 0.67$$

$$\lambda_2 = \frac{2L}{5} = 0.5$$