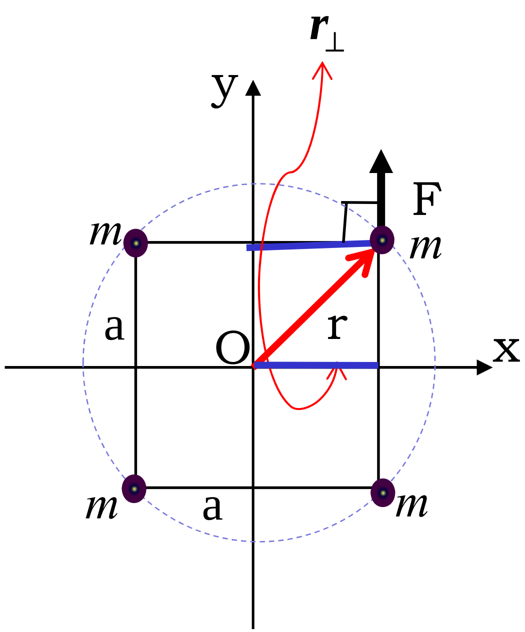
제 8 장 연습 및 예제문제

연습문제	홈페이지 예제문제
8-1	8-11
8-2	8-15
8-4	
8-5	
8-6	
8-7	
8-8	
8-9	
8-10	

연습 8-1 질량을 무시할 수 있는 한변의 길이가 a 인 정사각형 판의 각 꼭지점에 질량이 m 인 추가 달려 있다. 이 판의 중심은 원점에 고정되어 있고 판은 z 축을 회전축으로 회전할 수 있다. (가) 이 계의 회전 관성을 구하여라. (나) 크기가 F 인 힘을 가하면 돌림 힘의 크기는 얼마인가? (다) 각가속도는 얼마인가?

풀이



O 축을 중심으로 회전하므로 회전 반경(r)은 정사각형의 대각선의 반에 해당한다.

(가) 회전관성은 $\boldsymbol{I = \sum mr^2}$ 의 식에서 질량 m 이 4 개 이므로

$$I = 4 \times m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = 2ma^2$$

(나) 돌림힘의 크기는 회전 반경 $\boldsymbol{r}$ 과 이에 수직한 힘을 곱하면 된다.

그런데 **F** 에 수직한 반경은 $\boldsymbol{r_\perp = \frac{a}{2}}$ 이므로

$$\tau = Fr_\perp = \frac{Fa}{2}$$

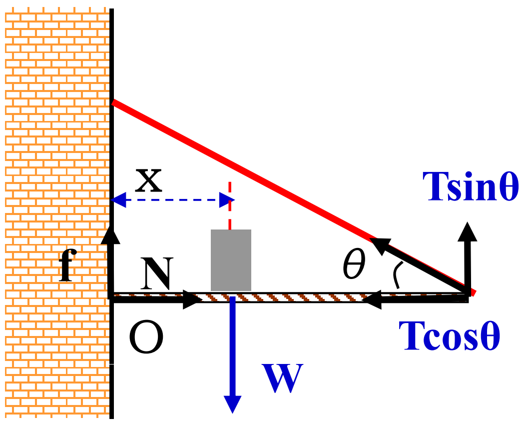
(다) 각가속도는 $\boldsymbol{\tau = Fr_\perp = I\alpha}$ 의 식으로 부터

$$\tau = I\alpha = \frac{Fa}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{Fa}{2I} = \frac{Fa}{2 \times 2ma^2} = \frac{F}{4ma}$$

연습8-2 길이가 L 인 무게를 무시할 수 있는 얇은 판의 한 쪽 끝은 벽에 고정되어 있고 다른 쪽 끝은 실에 매여 있다. 실의 다른 쪽 끝은 벽에 고정되어 있고 실과 판 사이의 각도 θ 이다. 무게 W 인 물체가 벽으로 부터 x 만큼 떨어져서 판 위에 놓여 있다, 실의 장력을 구하여라.

풀이

정적 평형 조건은 병진 힘과 외부 토오크의 합이 모두 0 이다.



- 얇은 판에 작용하는 병진 힘의 합은

(x축) $f + T\sin\theta - W = 0$, (y축): $N - T\cos\theta = 0$

여기서 병진 힘은 구해봐야 마찰계수가 주어지지 않는 한 실의 장력을 구하는 데 별로 쓸모가 없으므로 회전식을 더 고려한다.

평형 조건

$$\sum_i F_{ix} = 0$$
$$\sum_i F_{iy} = 0$$
$$\sum_i \tau_i = 0$$

- 벽면의 고정점 0 를 기준으로 한 토오크의 합을 구하면 0 이 되어야 한다 :

$$LT\sin\theta - xW = 0 \qquad \therefore T = \frac{Wx}{L\sin\theta}$$

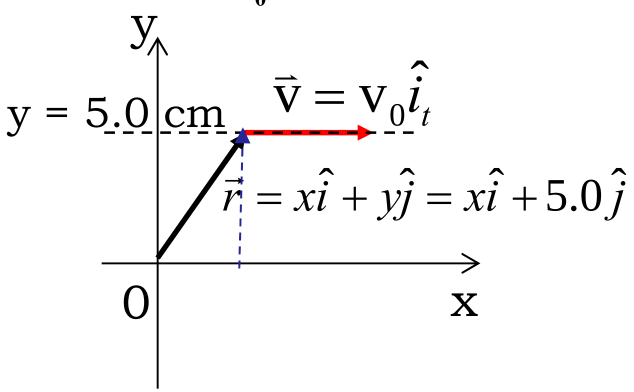
(만일 얇은 판의 오른쪽을 회전축으로 하여 토오크의 합을 계산해도 같은 결과의 장력을 얻을 수 있지만, 벽면을 고정점으로 하면 계산이 훨씬 간편함을 알 수 있다.)

연습 **8-3** 질량 **m**인 입자가 **xy** 평면에서 **y = 5.0 cm** 인 축을 따라서 일정한 속력 **v**로 **x** 축의 양의 방향으로 움직인다 . 원점에 대한 이 입자의 각운동량이 운동하는 동안 일정함을 보여라.

풀이

각운동량 $\left(\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}\right)$ 의 식에 좌표 $\boldsymbol{r}$ 과 속도에 대한 식을 대입하면

$\boldsymbol{v}_0$: 일정속력



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$= \left(x\hat{i} + 5.0\hat{j}\right) \times \left(m\mathrm{v}_0\hat{i}\right)$$
$$= -5.0m\mathrm{v}_0\hat{k} \quad (\because\ \hat{i} \times \hat{i} = 0,\ \ \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k})$$
$$\left|\vec{L}\right| = -5.0m\mathrm{v}_0 = \text{일정} \qquad (-\hat{k}\text{방향})$$

또는 $$\left|\vec{\boldsymbol{L}}\right| = \boldsymbol{rp}\sin\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{p} = \boldsymbol{ymv}_0 = \boldsymbol{5mv}_0 \qquad \Leftarrow (\boldsymbol{y} = \mathbf{5})$$

x 축으로 움직이는 입자의 각운동량은 **y** 성분 의 거리가 일정하면 원점에 대해 일정한 각운동량을 갖는다

연습 8-4 질량 **m**인 입자가 지면에 대해서 각 $\boldsymbol{\theta}$ 이고 초속력이 $\mathbf{v_0}$ 로 발사 되었다. **(가)** 입자의 처음 위치에 대해서 각운동량을 시간의 함수로 구하여라. **(나)** 시간 변화에 대한 각운동량 변화를 구하여라. **(다)** 중력에 의한 돌림힘을 계산하라

$\boxed{\text{풀이}}$

연직상방으로 운동하는 입자는 x 축으로는 등속운동, y 축으로는 등가속도 운동을 하므로

입자 속도 : $\vec{v} = (v_0 \cos\theta)\hat{i} + (v_0 \sin\theta - gt)\hat{j}$

입자의 궤적 : $\vec{r} = (v_0 \cos\theta \cdot t)\hat{i} + \left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}$

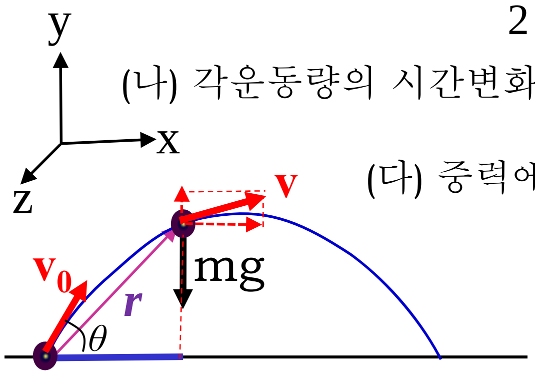
(가) 각운동량 : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$= \left\{(v_0 \cos\theta \cdot t)\hat{i} + \left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}\right\} \times \left\{(mv_0 \cos\theta \cdot t)\hat{i} + (mv_0 \sin\theta - gt)\hat{j}\right\}$$

$$= \left\{mv_0{}^2 \cancel{\sin\theta}\cos\theta \cdot t - \frac{1}{2}mgt^2 v_0 \cos\theta\right\}(-\hat{k}) + \left\{mv_0{}^2 \cancel{\sin\theta}\cos\theta \cdot t - mgt^2 v_0 \cos\theta\right\}(\hat{k})$$

$$= -\frac{1}{2}mgt^2 v_0 \cos\theta \ \hat{k} \qquad (\because\ \hat{i}\times\hat{i} = 0,\ \ \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k})$$

(나) 각운동량의 시간변화는 (가)를 시간 t 로 미분한다 : $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = -mgt\, v_0 \cos\theta \ \hat{k}$



$x = v_0 \cos\theta\, t$

(다) 중력에 의한 돌림힘?

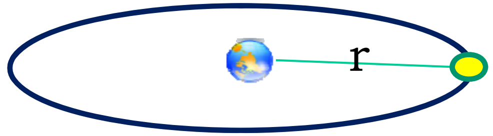
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \left\{(v_0 \cos\theta \cdot t)\hat{i} + \left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}\right\} \times (-mg)\hat{j} = -mgtv_0 \cos\theta \ \hat{k}$$

$$\left(|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = \mathbf{r}F_{\perp} = \boldsymbol{x}mg = -\boldsymbol{mgtv_0 \cos\theta}\right) \qquad \left(\because \vec{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{mg}\hat{\boldsymbol{j}},\right)$$

연습 8-5 달이 지구를 중심으로 원운동한다고 가정하자. 케플러의 주기법칙은 "행성 주기의 제곱은 원궤도 반지름의 세제곱에 비례한다" 이다. 이것을 식으로 쓰면 $T^2= 4\pi^2r^3/GM_e$ 이다. 여기서 M_e 은 지구의 질량이고 r은 지구 중심과 달 중심 사이의 거리이다. 달에 작용하는 구심력이 거리의 제곱에 역비례하는 힘임을 증명하라 (도움말 : 힘의 표현과 v= 2πR/T 을 사용하라).

풀이

달의 선속력 : $\mathbf{v} = \frac{S}{T} = \frac{2\pi r}{T}$



(r : 달과 지구 사이의 거리, T : 주기)

달에 작용하는 구심력 : $F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \Rightarrow F = \frac{4\pi^2 rm}{T^2}$ (1)

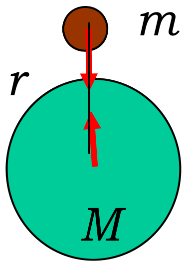
케플러 법칙 $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$ 구심력의 식인 (1)에 대입하면

$$F = \frac{4\pi^2 rm}{T^2} = 4\pi^2 rm\left(\frac{GM_e}{4\pi^2 r^3}\right) = \frac{GM_e m}{r^2}$$ (구심력=만유인력)

달에 작용하는 구심력은 지구와 달 사이의 거리의 제곱에 역비례하는 만유인력임을 알 수 있다

연습 8-6 달의 질량은 M= 7.36 x 10^{22} kg 이고 달의 반지름은 r= 1.74 x 10^{6} m 이다. 달의 표면에서 달의 중력가속도를 구하여라.

풀이



반경 r 만큼 떨어진 물체에 달이 작용하는 만유인력에 의해 물체가 달에 떨어지게 된다.

$$F = -G\frac{mM}{r^2} = ma = mg \longrightarrow |\boldsymbol{g}| = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{r}^2}$$

$r = 1.74\times10^{6}$ m : 달의 반지름

$M = 7.36\times10^{22}$ kg : 달의 질량

$$\boldsymbol{g = G\frac{M}{r^2} = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2/kg^2}\ \frac{7.36\times10^{22}\,\mathrm{kg}}{(1.74\times10^{6}\,\mathrm{m})^2}}$$

$$\boldsymbol{= 1.62\ \mathrm{m/s^2}}$$

연습 8-7 질량 m인 물체가 지구의 중력장을 벗어나서 탈출하려면 이 입자의 역학 에너지가 E≥ 0 이어야 한다. 공기 저항을 무시할 때 이 입자가 지구를 탈출하는데 필요한 최소의 속력은 얼마인가?

풀이

지구의 중심에서 R_E 의 거리에 놓여 있는 지상의 물체의 역학적에너지는 운동에너지와 위치에너지의 합이다. 이 물체가 지구에서 무한대로 멀어지게 되려면 속박상태의 음의 위치에너지 보다 큰 운동에너지를 갖게 되면 속박상태가 되지 않고 탈출할 수 있게 된다. 탈출하려면 역학적에너지는 최소 0 보다 같거나 크면 된다.

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{M_E m}{R_E} \geq 0$$

$$\therefore v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11}\, Nm^2/kg^2 \times 6.0 \times 10^{24}\, kg}{6.4 \times 10^6\, m}}$$

$$= 11.2 \text{ km/s}$$

연습 8-8 달과 태양의 평균거리와 지구와 태양의 평균 거리는 거의 같다. 달에 작용하는 태양에 의한 중력과 지구에 의한 중력의 비 $F_{태양}$ / $F_{지구}$ 를 구하여라

풀이

달과 태양의 만유인력

$$F_{태양-달} = G\frac{M_s m}{r_{s-m}^2}$$

(m :달의 질량)

$M_S = 1.99\times10^{30}$ kg : 태양의 질량

$r_{S-m} = 1.5\times10^{11}$ m : 태양와 달사이의 거리

달과 지구의 만유인력

$$F_{지구-달} = G\frac{M_E m}{r_{E-m}^2}$$

$M_E = 5.98\times10^{24}$ kg : 지구의 질량

$r_{E-m} = 3.8\times10^{8}$ m : 지구와 달사이의 거리

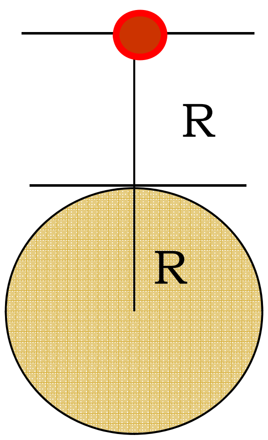
지구와 태양이 달에 미치는 중력의 비:

$$\frac{F_{태양}}{F_{지구}} = \frac{G\frac{M_s m}{r_{S-m}^2}}{G\frac{M_E m}{r_{E-m}^2}} = \frac{M_s}{M_E}\left(\frac{r_{E-m}}{r_{S-m}}\right)^2 = \frac{(1.99\times10^{30}kg)}{(5.98\times10^{24}kg)}\left(\frac{3.8\times10^{8}m}{1.5\times10^{11}m}\right)^2 = 2.1$$

연습 8-9 지구 표면에서부터 지구 반지름만큼의 고도를 갖는 지점에서 물체가 떨어진다. 지구의 질량이 M 이고 반지름이 R 이라면, 물체가 지구에 부딪치기 직전의 속도는 얼마인가?

풀이

역학적에너지는 보존법칙에 의해 고도가 R 인 위치에서의 위치에너지는 지구 표면에서의 위치에너지와 운동에너지와 같다.



$$E = K + U = -G\frac{Mm}{2R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{Mm}{2R} + G\frac{Mm}{R} = G\frac{Mm}{2R}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

연습 8-10 발사체를 지구 탈출 속도의 ½ 배의 속도로 지표면에서 연직 위로 발사한다.
지구 반경이 R 이라면 발사체가 도달하는 최고의 높이는?

풀이

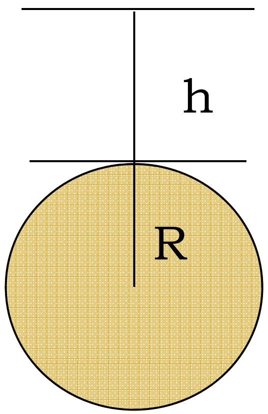
(연습7-7 참조)

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{M_E m}{R_E} \geq 0$$

$$\therefore v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$ 탈출속도

지구 탈출 속도의 ½ 배로 발사하므로 $v = \frac{1}{2} v_e = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \longrightarrow v^2 = \frac{GM}{2R}$

도달되는 최종 높이를 h 라고 하면 h 높이에 도달하면
운동에너지가 0 이므로 역학적 에너지 보존에 의해



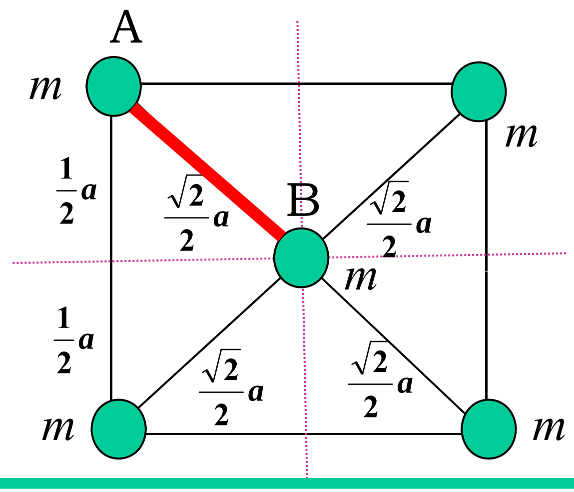
$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{R} = -G \frac{Mm}{R+h}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} \left(\frac{\cancel{GM}}{2R} \right) - \cancel{G} \frac{\cancel{Mm}}{R} = -\cancel{G} \frac{\cancel{Mm}}{R+h}$$

$$-\frac{3}{4R} = -\frac{1}{R+h} \Rightarrow h = \frac{1}{3} R$$

[예제] 한 변의 길이가 a 인 정사각형의 4개의 꼭지점과 중앙에 질량이 m인 물체가 있다. 정사각형 중앙의 질량 m을 무한히 먼 곳으로 이동시키는 데 외부에서 해 줘야하는 일은 얼마인가?

풀이



$$W_{total} = W_{AB} \times 4 = G\frac{mm}{R_{AB}} \times 4$$

$$= \frac{Gm^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)} \times 4 = 4\sqrt{2}\,\frac{Gm^2}{a}$$

거리 R 만큼 떨어진 물체를 무한히 먼 곳으로 이동시키는데 외력에서 해 주어야 하는 일

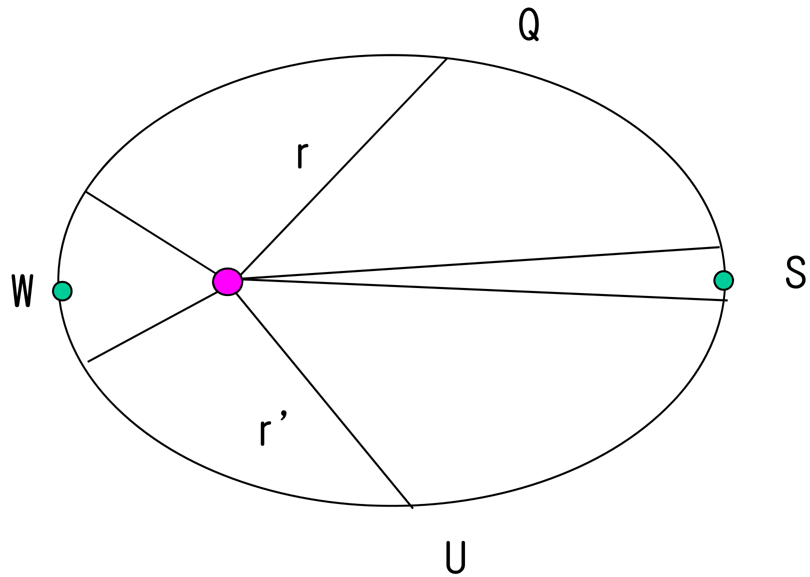
$$\Delta U = U(\infty) - U(R) = W_{ext} = \int_R^{\infty} F_{ext} \cdot ds = \int_R^{\infty} F_{ext}\, dr$$

$$= \int_R^{\infty} G\frac{Mm}{r^2} dr = -G\frac{Mm}{r}\Big|_R^{\infty} = G\frac{Mm}{R}$$

[예제] 행성의 가속도의 크기가 가장 큰 위치는?

풀이

행성이 받는 힘은 만유인력이므로 가까운 거리의 제곱에 반비례한다. 따라서 거리가 먼 S 위치에서 힘이 가장 작고 W 위치에서는 가장 기깝기 때문에 힘이 가장 크며가속도도 크다.



[예상 7-16] 행성의 속력이 같은 두 위치를 구하라

풀이

r = r' 의 같은 거리에 있는 Q, U 위치는 Kepler 제 2법칙(면적의 법칙)에 의해 속력이 같다.