

제 7 장 연습문제 및 예제문제

연습문제

7-1
7-2
7-3
7-4
7-5
7-6
7-7
7-8
7-9
7-10

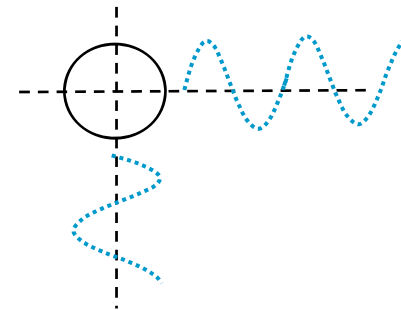
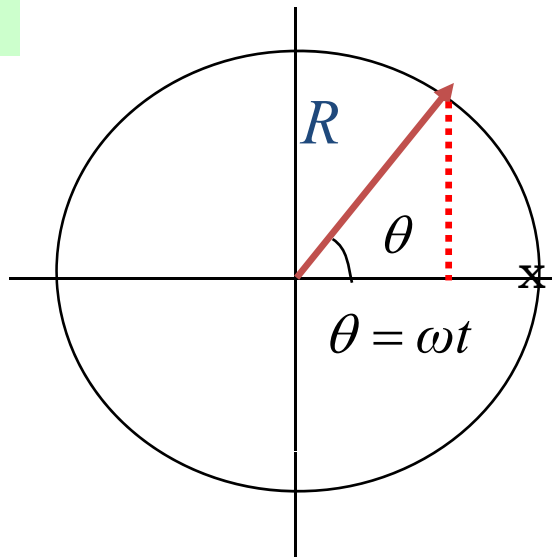
홈페이지

예제문제

7-1
7-2
7-4
7-31

[연습 7-1] : 반지름이 R 인 원 위를 등각속도 ω 로 원운동하는 물체가 있다. 이제 아래 그림과 같이 빛을 쏘여 스크린 상에 맺는 상의 운동을 생각하자. 상의 위치, 속도, 가속도를 구하여라.

풀이



원운동을 한쪽면에서 투영해보면
진동운동 형태가 되며 궤적은 사
인이나 코사인이 된다.

상의 위치: $y = R \sin \omega t$

(위치의 식을 시간 t 로 미분하면)

상의 속도: $v_y = \omega R \cos \omega t$

(속도의 식을 시간 t 로 미분하면)

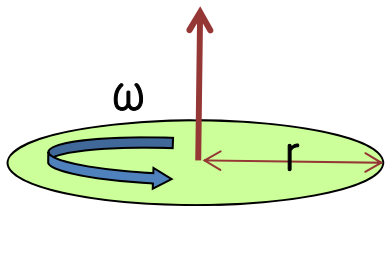
상의 가속도: $a_y = -\omega^2 R \sin \omega t$

[연습 7-2] 컴퓨터의 하드디스크 안에는 ‘플래터’ 라고 불리는 자성체를 입힌 원판이 들어 있다. 지름이 3.5 인치인 플래터가 7200 rpm (분당회전수)의 각속력으로 회전한다고 하자.

풀이

원판의 반경을 SI 단위로 전환: $r = 1.75 \text{ in} = 1.75 \text{ in} \left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} \right) \left(\frac{10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ cm}} \right) = 4.45 \times 10^{-2} \text{ m}$

1초 동안 플래터의 회전수(진동수): $f = \frac{7200 \text{ 회전}}{1 \text{ min}} = \left(\frac{7200 \text{ 회전}}{1 \text{ min}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ sec}} \right) = 120 \text{ sec}^{-1}$



(가) 플래터가 한 바퀴 회전하는 데 걸리는 시간은 얼마인가?

주기(T) : 한 바퀴 회전하는 데 걸리는 시간은 진동수의 역수이다

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{120 \text{ sec}^{-1}} = 8.3 \times 10^{-3} \text{ sec}$$

(나) 플래터의 각속력을 rad/s 로 나타내어라.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ (rad)}}{8.3 \times 10^{-3} \text{ sec}} = 754 \text{ rad / sec}$$

(다) 플래터의 가장자리 한 점의 순간속력은 얼마인가?

$$v = r\omega = \frac{2\pi r}{T} = 4.45 \times 10^{-2} \text{ m} \times 754 \text{ sec}^{-1} = 34 \text{ m / sec}$$

$$r = 3.5 \text{ in}$$

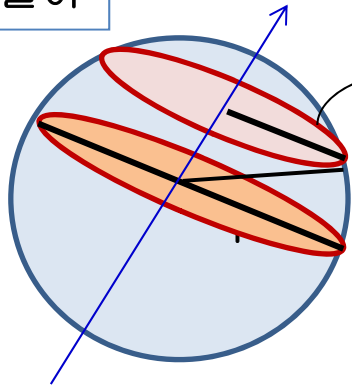
$$f = 7200 \text{ min}$$

[연습 7-3] (가) 지구 반지름은 대략 $6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 이다. 어떤 사람이 인천(위도 37도)에 있다고 하자. 지구 자전에 의한 이 사람의 선 속력은 몇 km/h 인가? 또 구심가속도의 크기는 g (중력가속도의 크기) 의 몇 배인가?

(나) 지구 공전 운동에 의한 지구의 선속력과 구심가속도의 크기를 구하여라

풀이

(가) 자전할 때



지구의 각속력: 24시간(1일)동안 2π (360도)회전하므로

$$r' = r \cos 37^\circ \quad \omega = \frac{2\pi(\text{rad})}{24(\text{h})} = \frac{\pi}{12} \text{ rad/h}$$

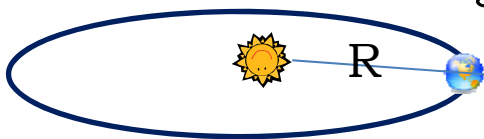
37도 위도에서 회전하는 반지름 $r' : r \cos 37^\circ$

37° (a) 사람의 선속력 : $v = r' \omega = 6.4 \times 10^3 \text{ km} \times \cos 37^\circ \times \frac{\pi}{12} = 1300 \text{ km/h}$

구심가속도의 값은?

$$a_p = r' \omega^2 = 6.4 \times 10^6 \text{ m} \times \cos 37^\circ \times \left(\frac{\pi}{12\text{h}} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{sec}} \right)^2 = 2.7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2 = 0.0028g$$

(나) 공전할 때



$$R = 1.5 \times 10^8 \text{ km} \\ = 1.5 \times 10^{10} \text{ m}$$

공전 각속력: 365x24시간(365일)동안 2π (360도)회전하므로

$$\omega' = \frac{2\pi(\text{rad})}{365 \times 24(\text{h})} = 7.17 \times 10^{-4} \text{ rad/h}$$

(a) 지구의 선속력 $v = R\omega' = 1.5 \times 10^8 \text{ km} \times 7.17 \times 10^{-4} \text{ rad/s} = 1.1 \times 10^5 \text{ km/h}$

(b) 구심가속도의 값은?

$$a_E = R\omega'^2 = 1.5 \times 10^{10} \text{ m} \times \left(7.17 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{h}} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \right)^2 = 0.0060 \text{ m/s}^2$$

[연습 7-4] 질량을 무시할 수 있는 길이 L 인 실 끝에 매달린 질량 m 인 추가 수직축에 대해서 각이 θ_0 일 때 속력이 v_0 였다. 이 때 이 추의 구심가속도와 접선 가속도의 성분을 구하여라. 구심가속도가 최대가 될 때의 각과 구심가속도를 구하여라

풀이

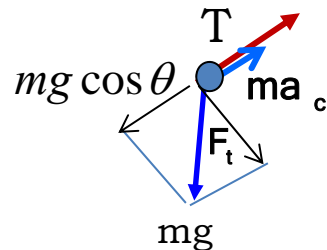
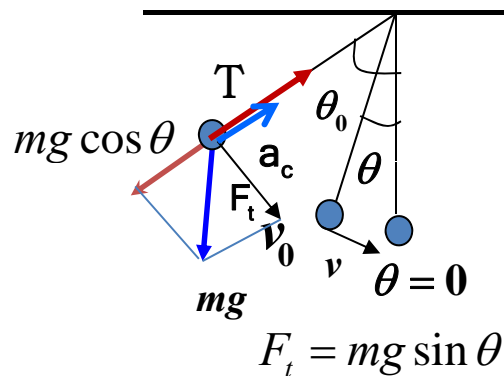
(a) 추의 속력이 v_0 일 때

실에 매달린 추에 작용하는 중력을 실의 방향과 실의 접선 방향으로 분해하면

$$\text{접선 방향 : } F_t = ma_t = mg \sin \theta \Rightarrow a_t = g \sin \theta \quad (\text{접선가속도})$$

$$\text{실의 방향(구심방향) : } T - mg \cos \theta_0 = ma_c = \frac{mv_0^2}{r} \Rightarrow a_c = \frac{v_0^2}{L} \quad (\text{구심가속도})$$

(b) 구심가속도가 최대가 될 때의 각과 구심가속도의 값은?



$$\begin{aligned} \Theta_0 \text{에서의 위치에너지 : } mgh &= mgL(1 - \cos \Theta_0) \\ \Theta \text{에서의 위치에너지 : } mgh &= mgL(1 - \cos \Theta) \\ (\Theta=0 \text{에서의 위치에너지값 : } 0 \text{ 이라고 함}) \end{aligned}$$

θ_0 의 위치와 임의의 각 θ 에서의 역학적 에너지는 보존됨을 이용하여 v 를 구한다

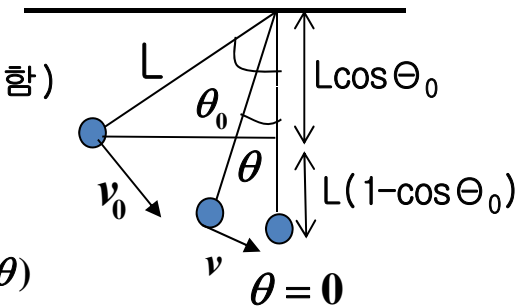
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgL(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$\theta = 0^\circ$ 일때 최대값 : $\cos \theta|_{\max} = 1$ 이므로

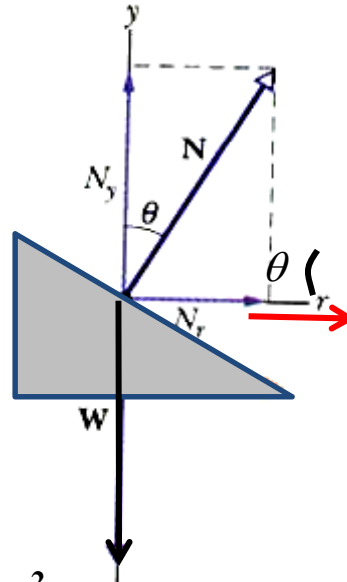
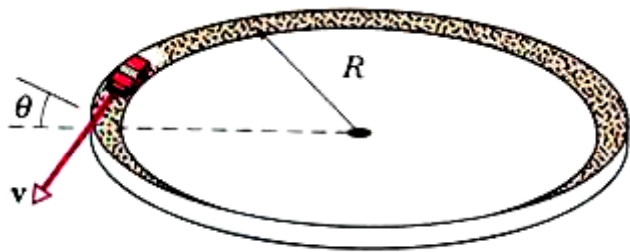
$$v_{\max}^2 = v_0^2 + 2gL(1 - \cos \theta_0)$$

$$\therefore \text{최대구심가속도 : } a_{c,\max} = \frac{v_0^2}{L} + 2g(1 - \cos \theta_0) \quad 5$$



[연습 7-5] 경사각이 θ 인 원형 경주용 도로에서 자동차가 미끄러지지 않고 안전하게 달릴 수 있는 최대 속력은 얼마인가? 단, 이 원형도로의 반지름은 r 이다.

풀이



$$\text{구심력} = \frac{mv^2}{R}$$

자동차에 작용하는 중력은 수직항력과 같게 되며 기울어진 각도만큼 생긴 수평성분은 회전을 가능하게 하는 구심력이 된다

$$\text{x-성분 : } N_x = N \sin \theta \geq \frac{mv^2}{R} \quad (1)$$

$$\text{y-성분 : } N_y = N \cos \theta = mg \quad (2)$$

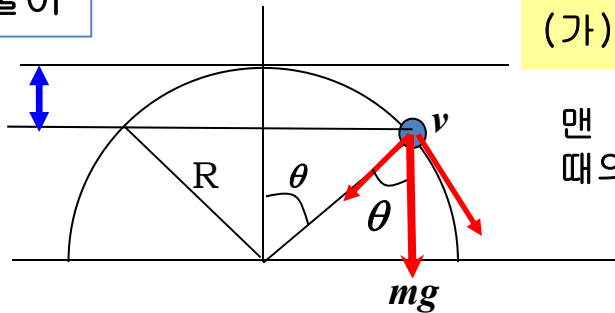
$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \tan \theta \geq \frac{v^2}{gR}$$

$$\therefore v \leq \sqrt{gR \tan \theta}$$

이 속력 보다 같거나 작게 달려야 미끄러지지 않는다.

[연습 7-6] 그림과 같이 반구 꼭대기에서 질량이 m 인 물체가 정지해 있다가 내려 오기 시작한다. 면과 물체 사이에 마찰은 없고 물체는 결국 반구로 부터 분리되어 떨어지게 된다.

풀이



(가) 꼭대기에서 미끄러져 내려 왔을 때 물체의 속력은 얼마인가?

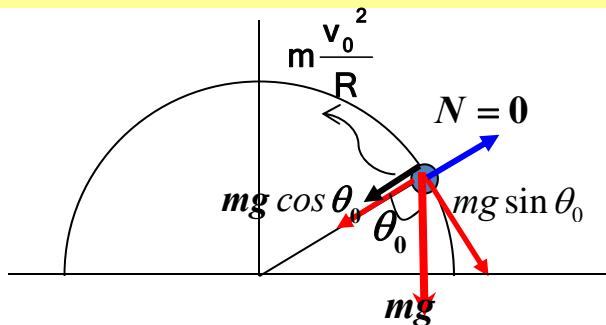
맨 꼭대기의 위치에너지는 mgR 이고 임의의 θ 각 위치에 내려왔을 때의 위치에너지는 $mgR \cos \theta$ 이다. 역학적에너지 보존에 의해

$$mgR = mgR \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow mg(R - R \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$2gR(1 - \cos \theta) = v^2$$

$$\therefore v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$$

(나) 분리되려 하는 점에서 수직항력이 0 이다. 이때의 각은 θ_0 라 하면 $\cos \theta_0$ 는 얼마인가?



$$mg \cos \theta - N = m \frac{v^2}{R}$$

분리되는 위치 $\theta = \theta_0$ 에서 $N(\text{수직항력}) = 0$ 이므로

$$mg \cos \theta_0 = m \frac{v_0^2}{R} \leftarrow v_0^2 = 2gR(1 - \cos \theta_0)$$

$$2gR(1 - \cos \theta_0) = gR \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta_0 = \frac{2}{3} \quad \longrightarrow \quad \theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48.2^\circ$$

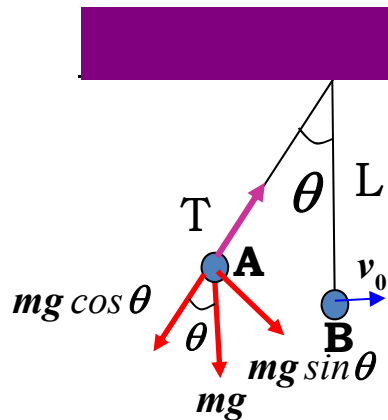
힘의 방정식

$$mg \cos \theta_0 - N = m \frac{v^2}{R}$$

[연습 7-7] 길이가 L 인(질량을 무시할 수 있는)실 끝에 질량이 m 인 추가 매달려 진동한다. 수직축에 대해서 최대각이 45도(A점)이고 제일 밑(B 점)에서 속력은 v_0 이다

풀이

(가) 45도 위치(A점)에서 가속도 방향은?



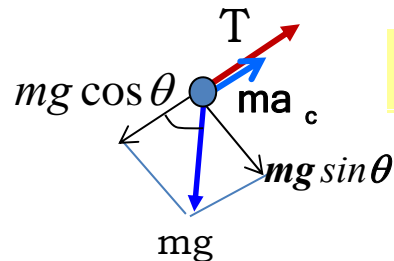
실의 방향: $T - mg \cos \theta = m a_c = \frac{mv^2}{r} = 0 \quad (\because v=0) \rightarrow a_c = 0$ (구심가속도: 0)

접선 방향: $a_t = g \sin \theta = g \sin 45^\circ$ 접선 방향(실에 수직인 방향)의 가속도만 존재

(나) 제일 밑(B 점)에서 가속도의 방향은?

접선 방향: $a_t = g \sin \theta = g \sin 0^\circ = 0$ (접선방향 가속도 성분은 없음)

실의 방향: (구심방향) $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v_0^2}{L}$ (↑) 구심가속도(실에 수직인 방향)의 가속도만 존재



(다) 제일 밑(B 점)에서 장력의 크기는?

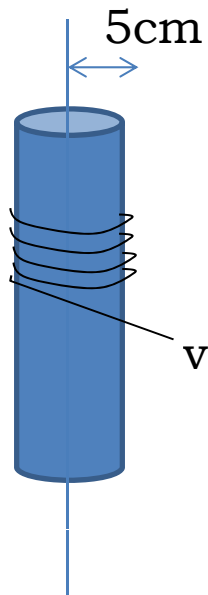
$$T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv_0^2}{L}$$

제일 밑점에서의 각 $\theta = 0^\circ$ 이므로 $\cos \theta = 1$, 제일 밑점에서의 속력 : v_0

$$v_0^2 = 2gL(1 - \cos 45^\circ) \Rightarrow v_0^2 = gL(1 - \sqrt{2}) \quad \therefore T = mg + \frac{mv_0^2}{L} = mg(3 - \sqrt{2})$$

[연습 7-8] 반지름이 5 cm 인 원기둥 표면에 줄이 감겨 있다. 원기둥이 축을 중심으로 자유롭게 회전한다면 줄을 원기둥 위에서 미끄러짐 없이 10 cm/s 의 일정한 속력으로 잡아당길 때 원기둥의 각속도는 얼마인가?

풀이



접선 방향의 선속도 v 가 10 cm/s 이므로

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{10 \text{ cm/sec}}{5 \text{ cm}} = 2 \text{ rad/sec}^{-1}$$

$$(r = 5 \text{ cm}, \quad v = 10 \text{ cm/sec})$$

[연습 7-9] 동일한 두 개의 바퀴 A, B 가 있다. 바퀴 B 는 A 보다 2 배 큰 각속도로 회전한다. 바퀴 A 의 테두리 위 한 점에서의 구심가속도는 바퀴 B 의 테두리 위 한 점에서의 구심가속도의 몇 배인가?

풀이

$$\text{구심가속도의 식 : } a = \left(\frac{v^2}{r} \right) = r\omega^2 \quad (v = r\omega)$$

$$\text{문제에서 주어진 각속도의 비 : } \omega_B = 2\omega_A \Rightarrow \omega_A = \frac{\omega_B}{2}$$

$$\Rightarrow \text{구심가속도 : } a_A = r\omega_A^2 = r\left(\frac{\omega_B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(r\omega_B^2) = \frac{1}{4}a_B$$

바퀴 A 의 구심가속도는 바퀴 B 의 구심가속도의 1/4 배이다

[연습 7-10] 지구 표면에 있는 물체는 지구의 자전에 의한 원운동을 하게 된다.
지구의 적도상에 정지해 있는 물체의 구심가속도는 얼마인가?
(단, 적도에서 지구의 반지름 $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 이다.)

풀이

지구의 각속력: 24시간(1일=86400s) 동안 2π (360도)회전하므로

$$\omega = \frac{2\pi}{(24 \times 3600)s} = 7.28 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow a_A = R\omega^2 = (6.4 \times 10^6) \times (7.28 \times 10^{-5})^2 = 3.38 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

제 7 장 홈페이지 예제문제

[예제 7-1] 수레 바퀴가 일정한 비율로 10초에 100번 회전한다면 수레 바퀴의 각속력은 얼마인가?

풀이

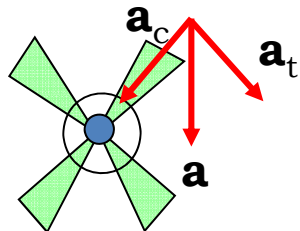
각변위 $\Delta\theta = 100\text{회 전} \times \left(\frac{2\pi}{1\text{회 전}} \right), \quad \Delta t = 10\text{sec}$

평균각속력 $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi \times 100}{10\text{sec}} = 63\text{rad/sec}$

또는 (진동수: $f = 100\text{ rev}/10\text{sec} = 10\text{ rev/sec} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \times 10 = 63\text{rad/sec}$)

[예제 7-4] 다음 선풍기의 끝 날개가 시계 방향으로 속도가 증가하면서 회전하는 선풍기의 가속도 방향은?

풀이



$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

\vec{a}_c : 구심가속도(중심방향)

\vec{a}_t : 접선방향가속도

구심방향의 가속도와 접선방향의 가속도가 합쳐져서 선풍기의 날개의 가속도 방향은 아래를 향하게 된다

[예제 7-2] 스위치를 켜고 10초 후 선풍기는 300 rev/min 으로 회전한다. 이 선풍기의 평균 각가속도는 얼마인가?

풀이

진동수: $f = 300 \text{ rev/min}$

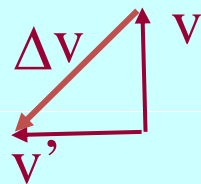
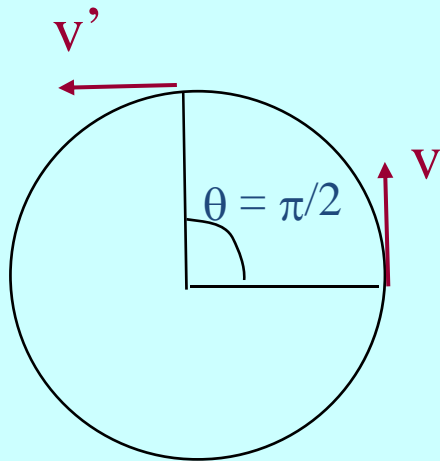
$$f = 300 \text{ rev}/60\text{sec} = 5 \text{ rev/sec}$$

$$\Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \times 5 = 31.4 \text{ rad/sec}$$

각속도가 정지한 상태에서 10초 후에 31.4 rad/s 로 변화했으므로 각가속도는

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{31.4 \text{ rad/sec} - 0}{10 \text{ sec}} = 3.14 \text{ rad/sec}^2$$

[예제 7-31] 어떤 물체가 등속원운동을 하고 있다. 이 물체가 4 초 동안 원의 $\frac{1}{4}$ 에 해당하는 8 cm를 돌았다면 이 때 평균 가속도의 크기는 몇 m/sec인가?



$$\Delta t = 4 \text{ sec}$$

$$\frac{2\pi r}{4} = 8 \text{ cm} \rightarrow r = \frac{16}{\pi} \text{ cm}$$

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\pi/2}{4 \text{ sec}} = \frac{\pi}{8} \text{ sec}^{-1}$$

$$v = r\omega = \frac{16}{\pi} \text{ cm} \cdot \frac{\pi}{8} \text{ sec}^{-1} = 2 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{2} \text{ m/s}}{4 \text{ sec}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s}^2$$