

제 6장 연습 문제 풀이

연습문제

6-1, 6-6, 6-11

6-2, 6-7, 6-12

6-3, 6-8, 6-13

6-4, 6-9, 6-14

6-5, 6-10, 6-15

홈페이지

예제문제

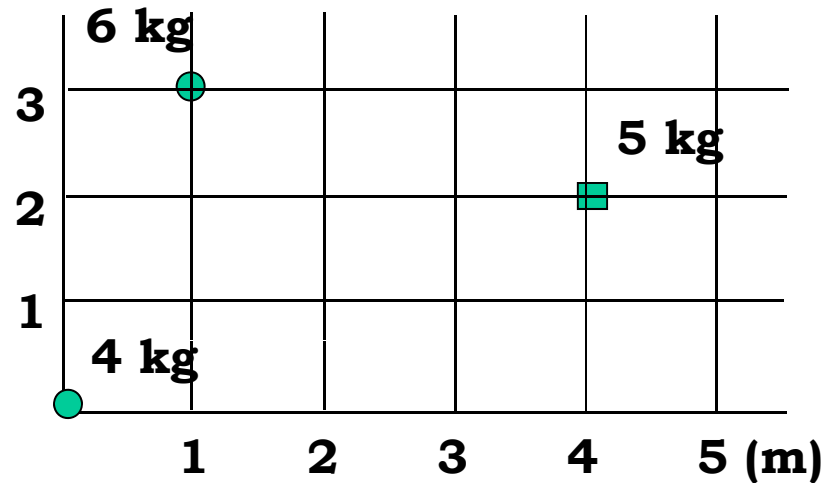
6-5

[연습 6-1] 세 물체의 질량 중심점

아래의 좌표상에 놓인 세 개 입자의 질량 중심 좌표는?

풀이

x 축과 y 축 각각에 대해 질량중심 식을 이용하여 좌표를 구한다



x 와 y 의 질량 중심 좌표식에서

$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{(4 \times 0 + 1 \times 6 + 5 \times 4) \text{ kg} \cdot \text{m}}{(4 + 6 + 5) \text{ kg}} = 1.7 \text{ m}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{(4 \times 0 + 3 \times 6 + 2 \times 5) \text{ kg} \cdot \text{m}}{(4 + 6 + 5) \text{ kg}} = 1.9 \text{ m}$$

그러므로 총질량의 질량 중심 좌표는

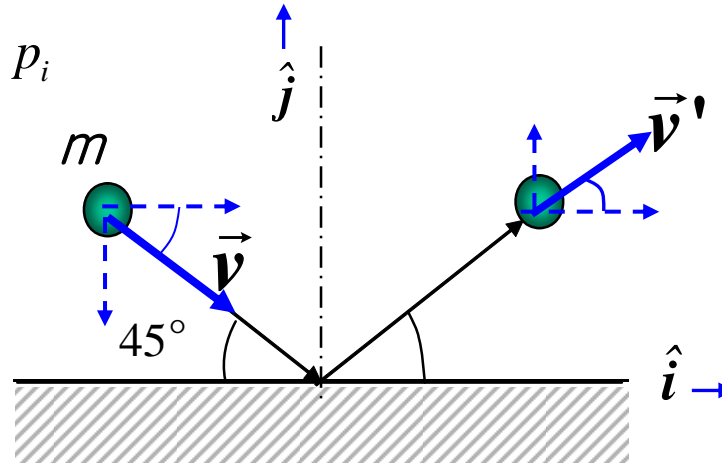
(1.7, 1.9)

연습 6-2. 질량이 m 인 공이 V 의 속력으로 지면을 향해 떨어졌다. 이 공이 지면과 45도의 각도로 부딪친 후 튀어 나오면 공의 운동량의 변화량은 얼마인가?

운동량 변화량 : $\Delta p = p_f - p_i$

풀이

($v' = v$: 탄성 충돌)



x축과 y축에 대해 나중 운동량에서 처음 운동량을 빼면

$$\Delta p_x = mv' \cos 45 - mv \cos 45 = 0$$

$$\Delta p_y = mv' \sin 45 - (-mv \sin 45) = \frac{2}{\sqrt{2}}(mv) = \sqrt{2}(mv)$$

공의 운동량
의 변화량

$$\Delta \vec{p} = \Delta p_x \hat{i} + \Delta p_y \hat{j} = 0\hat{i} + (\sqrt{2}mv)\hat{j} = (\sqrt{2}mv)\hat{j}$$

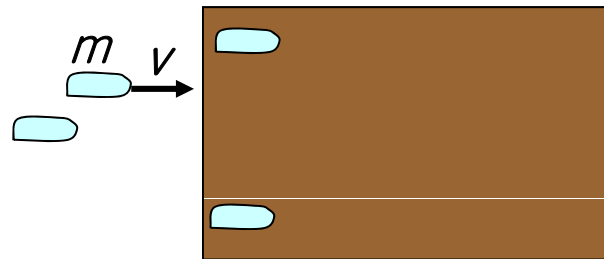
x 축으로는 운동량의 변화가 없고 y 축에 대한 운동량의 변화량만 있다

연습 6-3 어떤 탄환 하나의 질량은 5.0 g 이며 속력은 200m/s 이다. 이 탄환은 1초에 10발로 발사될 수 있다. 이러한 상태로 발사되는 탄환들이 모두 커다란 나무토막에 박힌다면 나무토막이 받는 평균 힘은 얼마인가?

운동량의 변화량은 충격량과 같으며 이 충격량은 평균힘과 시간에 비례하는 양이다.

풀이

$$\bar{F} \cdot (t_f - t_i) = \bar{F} \cdot \Delta t = p_f - p_i$$



$$\Delta t = 1 \text{ sec}$$

한편 나무토막의 운동량 변화량은 총알의 운동량의 변화량과 같고 방향이 반대이다.

$$\Delta p_{\text{총알}} = -10mv \quad (p_i = 10mv, \quad p_f = 0) \Rightarrow \Delta p_{\text{나무토막}} = 10mv$$

나무토막의 운동량의 변화량은 충격량과 같으므로 충격력은

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{10mv}{1s} = \frac{10 \cdot (5 \times 10^{-3} \text{ kg}) \cdot 200 \text{ m/s}}{1s} = 10 \text{ N}$$

나무토막이 받는 평균 힘 : 10 N

● “나무 토막이 받은 힘은 “+”로 원래 운동 방향

연습 6-4 원자로 내부에서는 많은 빠른 중성자가 발생된다. 이 중성자들의 속력을 감소시키기 위해서는 중성자들을 다른 원자에 충돌시킨다. 빠른 중성자가 같은 질량을 가진 수소의 원자핵에 충돌하는 경우와 질량이 약 200배 무거운 납 원자핵에 정면 충돌할 때 어느 경우 더 많은 운동에너지를 잃겠는가?

풀이 탄성충돌에 의한 충돌 후의 속도 식을 이용하여 운동에너지의 비를 구한다.

- 1) 질량이 m_1 인 중성자가 같은 질량의 수소원자핵 (m_2)에 충돌하는 경우
입사된 입자의 충돌 후 속도식은 (6.24)식에 의해

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 = 0 \quad (\because m_1 = m_2) \quad \frac{\Delta KE}{KE_i} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} = \left(1 - \frac{v_1'^2}{v_1^2} \right) = 1$$

중성자가 질량이 거의 같은 양성자에 충돌하면 100% 운동에너지를 잃는다.

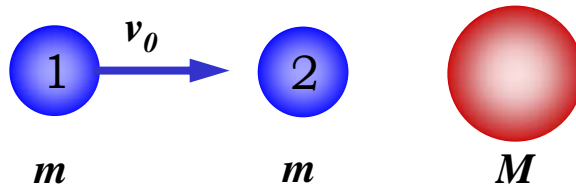
- 2) 질량이 m_1 인 중성자가 200배 무거운 납원자핵 (m_2)에 충돌했을 때

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - 200m_1}{m_1 + 200m_1} \right) v_1 = -\frac{199}{201} v_1 \quad (\because m_2 = 200m_1) \quad \frac{\Delta KE}{KE_i} = 1 - \left(\frac{v_1'}{v_1} \right)^2 = 1 - \left(\frac{199}{201} \right)^2 \approx 0.02$$

중성자가 무거운 납원자에 충돌하면 중성자의 처음 속력에서 2% 만 손실될 뿐 거의 운동에너지를 잃지 않고 반대방향으로 튕다.

연습 6-5. 질량이 m 인 물체가 속력 v_0 로 운동하고 있다. 이 물체의 앞에는 질량이 각각 m 과 M 인 두 물체가 서로 떨어진 채 놓여 있다. 이 물체들이 서로 정면 탄성 충돌한다고 할 때 $M > m$ 인 경우 이 상황에서는 3번의 충돌이 일어남을 보이고 각 물체의 최종속도를 구하여라.

풀이



탄성충돌의 의한 충돌 후의 속도 식을 이용한다.

입사 입자 의 충돌 후 속도 v_1'
표적입자 의 충돌 후 속도 v_2'

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 \quad v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1$$

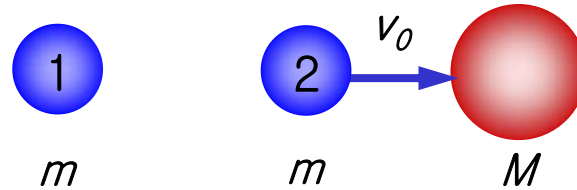
1) 질량이 같은 물체 1 과 2 의 충돌 ($m_1 = m_2 = m$) :

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 = \left(\frac{m - m}{m + m} \right) v_0 = 0 \quad v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 = \left(\frac{2m}{m + m} \right) v_0 = v_0$$

물체 1 은 정지하고 물체2의 속력은 물체 1과 같아진다

<다음 쪽 계속>

풀이 (계속)



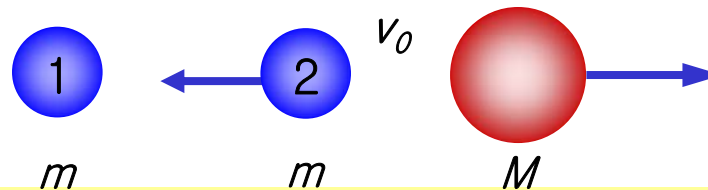
2) 물체 2 가 v_0 의 속력으로 M 과 충돌 ($m_1=m < m_2=M$) :

$$\text{물체 2 : } v_1'^{(2)} = \left(\frac{m-M}{m+M} \right) v_2' = \left(\frac{m-M}{m+M} \right) v_0 \approx -v_0$$

$$\text{물체 M : } v_2'^{(2)} = \left(\frac{2m}{m+M} \right) v_1 = \left(\frac{2m}{m+M} \right) v_0 \approx 0$$

물체 2 는 거의 처음과 같은 속력으로 되튀고

물체 M 은 오른쪽 방향으로 약하게 움직이게 된다.



3) M과 충돌후 되돌아온 물체 2 과 1 의 충돌 ($m_1=m_2=m$) :

$$\text{물체 1 : } v_2'^{(3)} = \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2} \right) v_1'^{(2)} = \left(\frac{2m}{m+m} \right) \left(\frac{m-M}{m+M} \right) v_0 = \left(\frac{m-M}{m+M} \right) v_0 \approx -v_0$$

$$\text{물체 2 : } v_1'^{(3)} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \right) (v_1'^{(2)}) = \left(\frac{m-m}{m+m} \right) \left(\frac{m-M}{m+M} \right) v_0 = 0$$

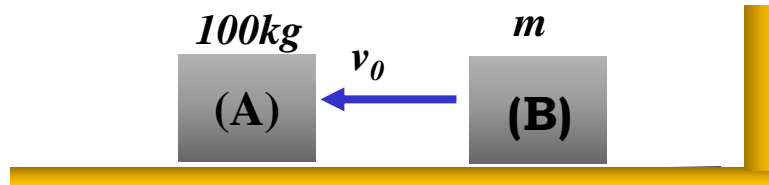
$$\text{물체 M : } v_2'^{(2)} = \left(\frac{2m}{m+M} \right) v_1 = \left(\frac{2m}{m+M} \right) v_0 \approx 0$$

물체 2 는 모든 운동량을 물체 1에 전달하므로 정지하게 되며,
물체 1은 물체 2의 입사속도와 거의 같은 속도가 되어 왼쪽으로 움직이게 된다.

물체 M 은 오른쪽 방향으로 약하게 움직인다.

연습 6-6. 질량이 100kg 인 물체 (A) 가 마찰이 없는 평면 위에 놓여 있다. 이 물체의 한편에는 벽면이 있으며, 그 벽면과 물체 사이에는 질량 m 인 물체 (B)가 어떤 속력 v_0 로 (A)를 향하여 운동하고 있다. 물체 (B)는 (A)와 한번 충돌한 후 다시 벽과 충돌한 다음 처음 운동방향으로 운동한다고 한다. 모든 충돌이 탄성충돌이라 할 때 충돌이 모두 끝난 후 두 물체의 속도가 같다면 물체 (B) 의 질량은 얼마인가? (벽의 질량은 무한히 크다고 가정하여라)

풀이



입사 입자의 충돌 후 속도 v_1'
 표적입자의 충돌 후 속도 v_2'

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 \quad v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1$$

1) 질량 m 인 (B) 물체가 (A) 와 충돌하면 ($m_1=m$, $m_2=100\text{kg}$) :

물체 (B)
$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 = \left(\frac{m - 100}{m + 100} \right) (-v_0)$$

물체 (A)
$$v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 = \left(\frac{2m}{m + 100} \right) (-v_0)$$

<다음 쪽 계속>

풀이 (계속)

2) 물체 B 는 $v_2' = \left(\frac{m-100}{m+100} \right) (-v_0)$ 의 속력으로 벽과 충돌함
 $(m_1=m, m_2=M=\infty, M \gg m)$:

$$\text{물체 (B)} \quad v_1'^{(2)} = \left(\frac{m-M}{m+M} \right) v_2' \cong -v_2' \quad (\because M \gg m)$$

$$\therefore v_1'^{(2)} = \left(\frac{m-100}{m+100} \right) v_0$$

$$\text{벽} \quad v_2'^{(2)} = \left(\frac{2m}{m+M} \right) v_1' \cong 0$$

물체 B 는 벽과 부딪쳐서 처음과 같은 속력으로 되튐다. 벽은 질량이 커서 움직이지 않는다.

3) 충돌후 물체 B 와 물체 A 는 같은 속도를 갖는 조건에서

$$\text{물체 (A): } v_2' = -\left(\frac{2m}{m+100} \right) v_0 \quad \text{물체 (B): } v_1'^{(2)} = \left(\frac{m-100}{m+100} \right) (v_0)$$

$$\left(\frac{m-100}{m+100} \right) v_0 = -\left(\frac{2m}{m+100} \right) v_0$$

$$m-100 = -2m \Rightarrow 3m = 100$$

$$\therefore m = \frac{100}{3} \text{ kg}$$

연습 6-7. 200m/s 의 속력으로 운동하는 질량이 0.1kg인 공을 글러브로 받았다.
공이 글러브에 힘을 작용하는 시간이 10ms 초라면 공이 글러브에 작용한 힘을 얼마인가? 단 힘의 크기는 충돌 중 일정하다고 가정한다.

운동량의 변화량은 충격량과 같으며 이 충격량은 평균힘과 시간에 비례하는 양이다.

풀이

(운동량의 변화량 = 충격량)

$$J = \bar{F} \Delta t = p_f - p_i$$

(음의 부호는 방향과 관계)

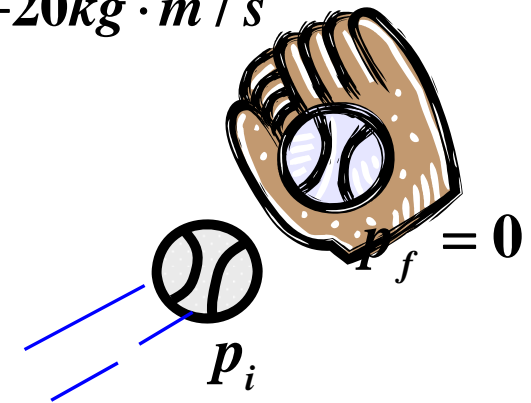
- $$J = p_f - p_i$$

$$= 0 - (mv_i) = -mv_i = -0.1\text{kg} \times 200\text{m/s} = -20\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

- $$\bar{F} \Delta t = J = -20.0(\text{kg} \cdot \text{m/s})$$

$$\bar{F} = \frac{20.0(\text{kg} \cdot \text{m/s})}{1.00 \times 10^{-2} \text{s}} = 2.00 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

$$= 2000 \text{N}$$



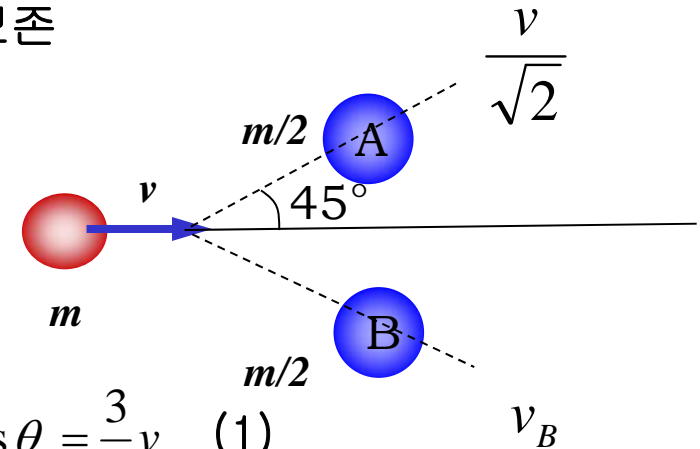
연습 6-8. 그림과 같이 질량 m , 속도가 v 인 물체가 내부 반응에 의하여 어느 순간 질량이 $m/2$ 인 둘로 쪼개져서 운동을 한다. 물체에 작용하는 중력은 무시한다.

(가) 이 때 물체의 총 운동량은 쪼개지기 전과 비교해서 어떻게 되는가?

풀이

(가)

물체의 총운동량은 외력이 작용하지 않고 내력에 의해 쪼개졌으므로 운동량은 일정하게 보존되므로 쪼개지기 후의 운동량은 전과 같다.



운동량 보존 법칙에 의해

$$X\text{축: } mv = \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\cos 45 + \left(\frac{m}{2}\right)v_B \cos \theta \Rightarrow v_B \cos \theta = \frac{3}{2}v \quad (1)$$

$$Y\text{축: } 0 = \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\sin 45 - \left(\frac{m}{2}\right)(v_B)\sin \theta \Rightarrow v_B \sin \theta = \frac{1}{2}v \quad (2)$$

$$(1)^2 + (2)^2 = (v_B \cos \theta)^2 + (v_B \sin \theta)^2 = \left(\frac{3}{2}v\right)^2 + \left(\frac{1}{2}v\right)^2 = \frac{10}{4}v^2$$

$$\therefore v_B = \frac{\sqrt{10}}{2}v$$

<다음 쪽 계속>

연습 6-8 (계속). 그림과 같이 질량 m , 속도가 v 인 물체가 내부 반응에 의하여 어느 순간 질량이 $m/2$ 인 둘로 쪼개져서 운동을 한다. 물체에 작용하는 중력은 무시한다.

- (나) 이 때 물체의 총 운동에너지는 쪼개지기 전과 비교해서 어떻게 되는가?
 (다) B 의 속력은 얼마인가?

풀이

(나) 물체의 운동에너지

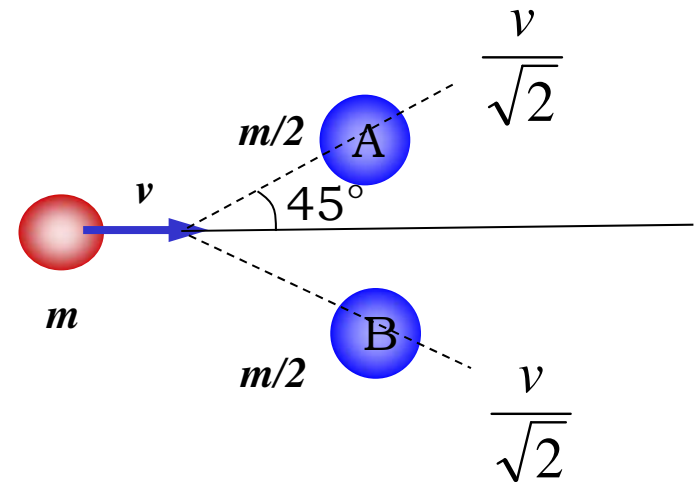
$$\text{충돌 전: } \frac{1}{2}mv^2$$

$$\begin{aligned} \text{충돌 후: } & \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_B^2 \\ &= \frac{m}{8}v^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}v\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2 \end{aligned}$$

충돌 전에 비해 충돌 후의 운동에너지가 증가하였다.

(다) B 의 속력은 (가)의 운동량 보존식을 통해 구한다.

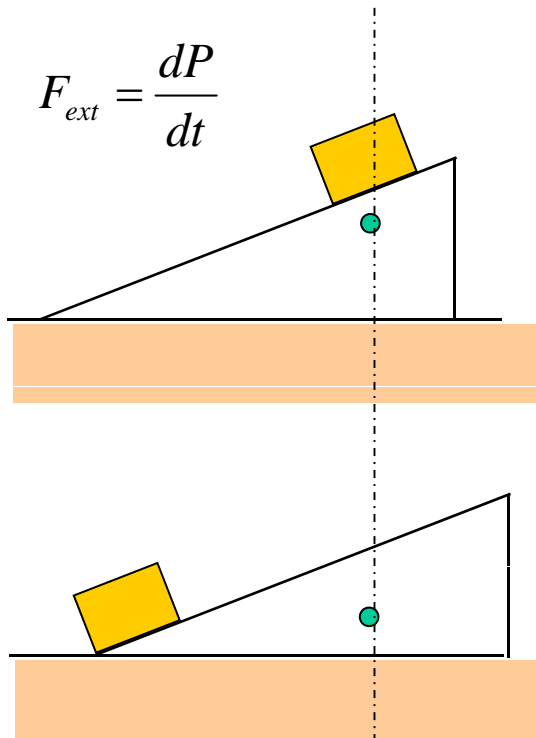
$$\therefore v_B = \frac{\sqrt{10}}{2}v$$



연습 6-9 큰 썰기 모양의 나무토막이 마찰이 없는 수평면에 놓여 있다. 작은 벽돌이 미끄러져 내려오기 시작하면 벽돌이 움직이는 동안 나무토막과 벽돌의 질량 중심은 어느 쪽으로 운동하는가?

풀이

큰 썰기 모양의 나무토막과 벽돌 사이에는 서로 미는 수직항력이 존재하지만 나무토막과 벽돌을 한 계로 본다면 이 힘은 내력이 된다. 내력은 뉴턴의 3법칙에 의하면 서로 상쇄되므로 이 계에 영향을 미치는 외력은 중력일 뿐이다.



$$F_{ext} = \frac{dP}{dt}$$

1) 수평방향 외력이 작용하지 않으므로 질량중심의 수평 방향의 속력은 변하지 않는다.

$$F_x = 0 \Rightarrow P_x = M(V_{cm})_x = \text{상수}$$

$$\therefore \text{질량중심의 } x \text{ 방향 속력 } (V_{cm})_x = \text{일정상수}$$

(M : 나무토막과 벽돌을 합한 전체질량)

2) 수직방향

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt} = -Mg$$

$$\Rightarrow P_y = M(V_{cm})_y = -Mgt$$

$$\therefore y \text{ 방향의 질량중심의 속력 } (V_{cm})_y = -gt$$

즉 나무토막과 벽돌로 된 계에 작용하는 외력은 수평방향으로는 0 이고 수직 방향으로만 중력이 작용하므로 이 계의 질량중심의 속력은 외력이 중력방향으로 (낙하운동의 속력과 같이) 수직 아래 쪽 방향으로 움직인다.

연습 6-10 두 사람 A와 B는 같은 운동에너지를 가지고 있다. A의 질량이 B의 9배일 때 A와 B의 운동량의 비는 얼마인가?

풀이

운동에너지가 같다는 조건에서 두 물체간의 속도의 비를 구한다. 또한 운동량은 질량과속도의 곱이므로 운동량의 비를 구한다.

$$(m_A = 9m_B)$$

$$\frac{K_B}{K_A} = \frac{\frac{1}{2}m_B v_B^2}{\frac{1}{2}m_A v_A^2} = \frac{m_B v_B^2}{(9m_B)v_A^2} = \frac{v_B^2}{9v_A^2} = 1 \Rightarrow v_B = 3v_A$$

$$P_A = m_A v_A = 9m_B \left(\frac{1}{3} v_B \right) = 3m_B v_B = 3P_B$$

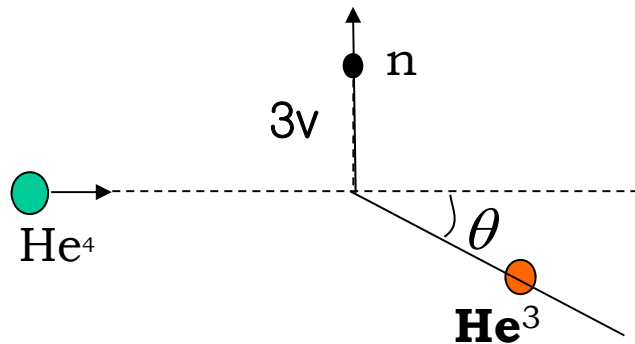
$$\therefore P_A : P_B = 3 : 1$$

연습 6-11 속력 v 를 가진 ${}^4\text{He}$ 핵(원자질량 $4u$)은 중성자(원자질량 $=1u$)와 ${}^3\text{He}$ 핵으로 쪼개진다. 중성자는 ${}^4\text{He}$ 핵과 직각으로 멀어진다. 중성자의 속력이 $3v$ 라면 ${}^3\text{He}$ 핵의 최종속력은?

풀이

${}^3\text{He}$ 의 원자질량 $= 3u$

운동량 보존식으로 풀면



$$(X\text{축}) \quad 4u \cdot v = 3u \cdot v_f \cos \theta \quad (1)$$

$$(Y\text{축}) \quad 1u \cdot 3v = 3u \cdot v_f \sin \theta \quad (2)$$

$$(1)^2 + (2)^2 = (4v)^2 + (3v)^2 = 9v_f^2$$

$$\therefore 25v^2 = 9v_f^2 \Rightarrow v_f = \frac{5v}{3}$$

연습 6-12. 3m/s의 속력으로 움직이는 보도가 있다. 평균적으로 매초 4명의 정지해 있던 사람이 보도 위로 올라서고 4명의 사람이 보도에서 내려온다. 한 사람의 질량이 60kg 일 때, 이 보도를 계속 움직이게 하기 위해서 필요한 평균힘은 얼마인가?

풀이 운동량의 변화량은 충격량과 같으며 충격량은 평균힘과 시간에 비례하는 양이다.

(운동량의 변화량 = 충격량) $J = \bar{F}\Delta t = \Delta p$

$$J = \Delta p = 4mv = 4 \times 60\text{kg} \times 3\text{m/s} = 720\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\bar{F}\Delta t = J = 720(\text{kg} \cdot \text{m/s})$$

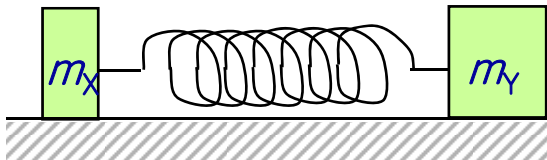
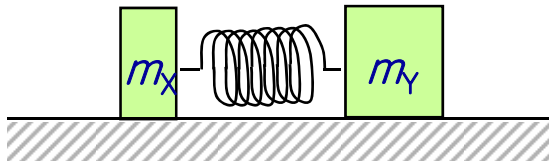
$$\bar{F} = \frac{720(\text{kg} \cdot \text{m/s})}{1\text{s}} = 720\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = 720\text{N}$$



연습 6-13. 13. 두 물체 X, Y 가 질량이 없는 용수철에 매여 마찰이 없는 수평인 표면에 정지해 있다. X 의 질량은 Y의 질량의 2/5 배이다. 두 물체를 압축시켰다가 놓을 때, X의 운동에너지는 Y의 운동에너지의 몇 배가 되는가?

풀이

운동량 보존법칙 (conservation of linear momentum)



$$\frac{dP}{dt} = F_{ext} = 0 \rightarrow P = \text{constant} \rightarrow P_{before} = P_{after}$$

외력이 없으므로 $0 = P_1 + P_2$

$$P_1 = -P_2$$

$$m_X v_X = -m_Y v_Y$$

두 물체의 속도 비는 $\frac{v_X}{v_Y} = -\frac{m_Y}{m_X} = \frac{5}{2}$

두 물체의 운동에너지 비는

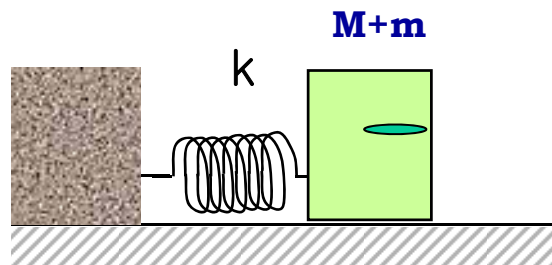
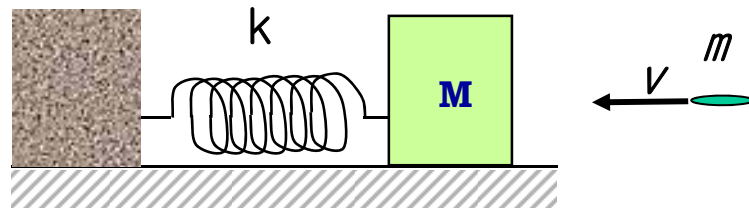
$m_X = 2/5 m_Y$ 이므로

$$\frac{K_X}{K_Y} = \frac{\frac{1}{2} m_X v_X^2}{\frac{1}{2} m_Y v_Y^2} = \frac{m_X}{m_Y} \left(\frac{v_X}{v_Y} \right)^2 = \frac{m_X}{m_Y} \left(\frac{m_Y}{m_X} \right)^2 = \frac{m_Y}{m_X} = \frac{5}{2}$$

연습 6-14. 그림과 같이 질량 m 인 총알이 용수철에 달려 있는 질량 M 인 나무토막에 속도 v 로 날아와 박혔다. 용수철 상수는 k 이고 용수철 끝은 벽에 고정되어 있으며, 나무토막과 바닥면 사이의 마찰은 무시한다. 이때, 용수철의 최대 압축 거리를 구하여라.

풀이

운동량 보존법칙 (conservation of linear momentum)에 의하여 총알이 나무토막에 박힌 후 나무토막과 총알이 박혀 움직이는 속도 v' 를 구한다. 이 운동에너지는 용수철의 탄성에너지로 전환되므로 최대 압축거리는 에너지 보존에 의해 구할 수 있다.



$$mv = (M + m)v' \Rightarrow v' = \frac{mv}{M + m}$$

$$\frac{1}{2}(M + m)v'^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}(M + m)\left(\frac{mv}{M + m}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{M + m} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\therefore x = \frac{mv}{\sqrt{k(M + m)}}$$

연습 6-15. 수평인 공기 트랙 위에서 속력 v 로 움직이는 질량이 m 인 수레가 정지해 있는 질량 $2m$ 인 수레와 충돌하여 서로 연결된 채 같이 움직인다. 한 수레가 다른 수레에 전달한 충격량은 얼마인가?

풀이

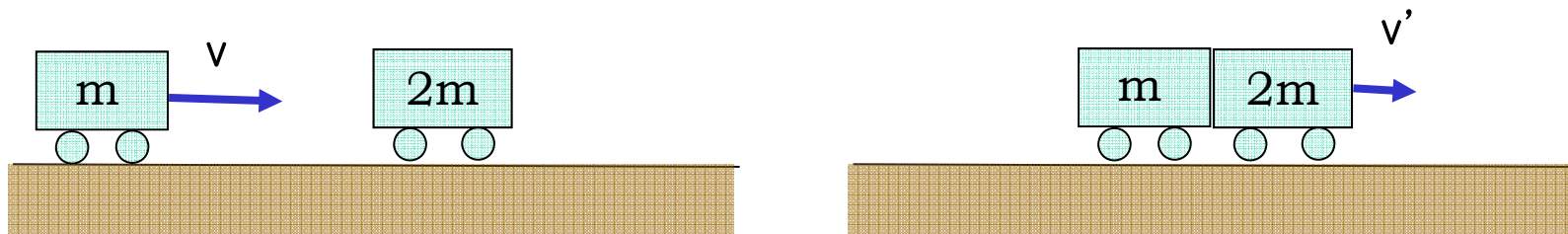
운동량 보존법칙 (conservation of linear momentum)에 의하여 충돌후 두 수레가 연결된 운동하는 속도를 구한다. 각 수레의 운동량의 변화량은 충격량과 같다.

$$mv = (m + 2m)v' = 3mv' \Rightarrow v' = \frac{1}{3}v$$

$$J = \Delta p$$

($2m$ 수레의 운동량의 변화량 = 충격량)

$$J = \Delta p = 2m(v' - 0) = 2mv' = \frac{2mv}{3} \quad (\text{m 수레의 충격량도 방향만 다를 뿐 크기는 같다})$$



[예제6-5] 두 개의 권총에서 **같은 속력**으로 총알을 발사했다. 1번 권총의 질량은 2번 권총의 3배이고, 1번 권총에서 발사되는 총알은 2번 권총에서 발사되는 총알 질량의 2배이다. 총알이 권총에 전달하는 운동량의 비는 얼마인가?

풀이

권총은 외력에 의한 것이 아닌 내력에 의한 발사이므로 운동량이 보존되므로 총알의 운동량만큼 권총에 전달된다.

$$\left(\overset{\text{총알}}{m_1 = 2m_2} \quad \overset{\text{권총}}{M_1 = 3M_2} \right)$$

$$\rightarrow M_1 V_1 + m_1 v = 0 \quad M_2 V_2 + m_2 v = 0$$

$$V_1 = \frac{-m_1}{M_1} v \quad V_2 = \frac{-m_2}{M_2} v$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_2 V_2}{M_1 V_1} = \frac{m_2 v}{m_1 v} = \frac{m_2 v}{2m_2 v} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P_2 : P_1 = 2 : 1$$