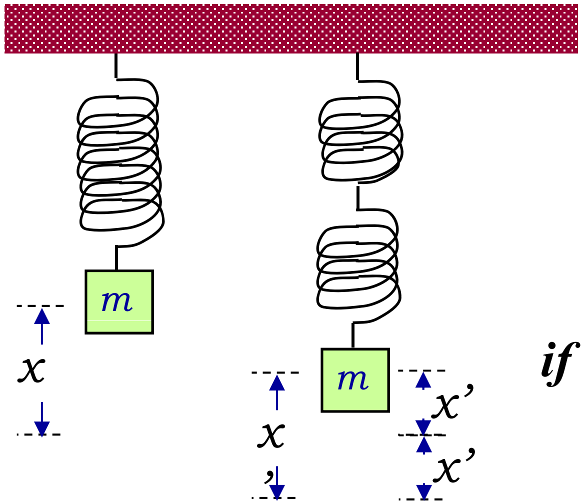
제 5장 연습 및 예제 문제

연습문제	홈페이지 예제문제
5-1, 5-6, 5-11	5-6
5-2, 5-7, 5-12	5-10
5-3, 5-8, 5-13	
5-4, 5-9, 5-14	
5-5, 5-10, 5-15	
5-16	

연습 5-1 : 용수철 상수가 K 인 용수철을 같은 길이가 되도록 두 개로 잘랐다. 잘라진 반쪽의 용수철 상수는 얼마인가?

풀이



$$x = x' + x' = 2x'$$

그림과 같이 탄성계수가 k 인 용수철에 물체를 매달았을 때의 늘어난 길이는 그 용수철을 반으로 잘라 두 개 합하여 늘어난 길이와 같다.

즉, 반으로 잘린 용수철은 mg 를 매달았을 때 처음의 용수철의 늘어난 길이의 반만큼만 늘어난다고 할 수 있다.

$$if \quad F = mg \Rightarrow x' = \frac{1}{2}x, \qquad F = kx = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{x}$$

$$\therefore k' = \frac{F}{x'} = \frac{mg}{\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\left(\frac{mg}{x}\right) = 2k \qquad \because k = \frac{mg}{x}$$

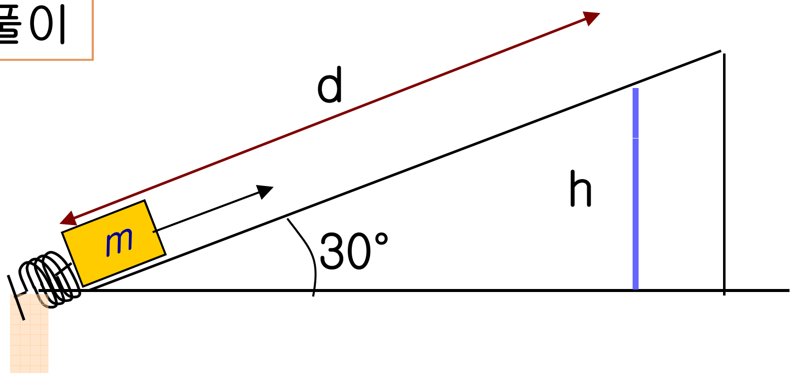
또는

$$\left(\begin{array}{l} x = x' + x' \Rightarrow \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k'} + \frac{mg}{k'} \\ \\ \frac{1}{k} = \frac{2}{k'} \quad \therefore k' = 2k \end{array} \right)$$

용수철을 반으로 자르거나 (같은 용수철을 병렬로 이어도) 탄성계수는 2배로 증가하고
용수철을 직렬로 이으면 탄성계수는 $\frac{1}{2}$ 배로 줄어든다는 사실을 기억해 두자.

연습 5-2 : 지면과 30° 의 각을 이룬 경사면 위에 질량이 무시되는 용수철이 놓여 있다. 이 용수철의 용수철 상수는 1960 N/m 이다. 이 용수철은 0.200 m 인 압축된 상태에 있으며 그 끝에는 질량이 2.00 kg 인 물체가 놓여 있다. 압축된 용수철을 놓으면 물체는 경사면을 따라 얼마나 높이 올라가겠는가?

풀이



탄성에너지는 위치에너지로 바뀌게 된다.
역학적에너지 보존법칙에 의하여

$$pE = \frac{1}{2}kx^2 = mgh = mgd\sin\theta$$

$$\left(h = d\sin 30^\circ\right)$$

용수철상수 : $k = 1960\,N/m$

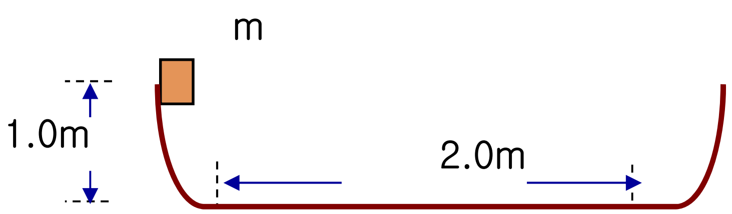
압축된 길이 : x = 0.200 m

물체의 질량 : 2.00 kg

$$\Rightarrow d = \frac{\frac{1}{2}kx^2}{mg\sin\theta} = \frac{\frac{1}{2}\times 1960(N/m)(0.200m)^2}{2.00kg(10m/s^2)(\sin 30^\circ)} = 4.00m$$

연습 5-3: 양끝에 경사진 부분을 가진 그릇의 한쪽 높이 1m 의 위치에서 물체가 미끄러져 내려가면 물체는 어디서 멈추겠는가?
단, 경사면은 마찰이 없고 바닥면의의 길이는 2.0 m, 마찰계수는 0.2 이다

풀이



물체의 위치에너지 : $U = mgh$

마찰력이 한 일 : $W = f \cdot s = \mu_k mgs$

$$f = \mu_k N \quad (N = mg)$$

물체의 위치에너지는 모두 마찰력에 의한 일로 사용되었다.(총 에너지보존 법칙)

$$E = mgh - f \cdot s = 0$$

$$mgh = \mu mgs$$

$$\therefore s = \frac{mgh}{\mu mg} = \frac{h}{\mu} = \frac{1.0}{0.2} = 5.0m$$

왕복 1회 운동후에 그릇의 중간 지점에 서게 됨

연습5-4 : 어떤 물체가 H 높이에서 자유낙하 되었을 때 임의의 높이에서의 속도와 운동에너지를 구하고 항상 역학적에너지가 높이에 상관없이 일정함을 보여라

풀이

(i) h 높이에서의 속력

$$2as = v^2 - v_0^2 \quad (v_0 = 0, a = g, s = H - h) \Rightarrow v = \sqrt{2g(H-h)}$$

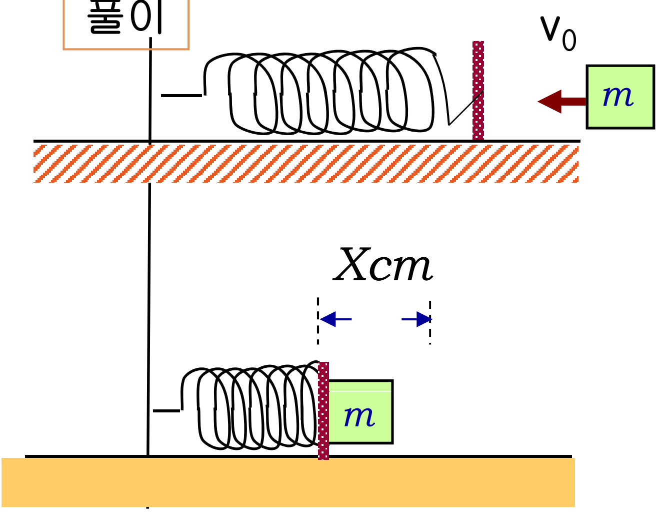
(ii) 운동에너지 $KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\{2g(H-h)\} = mg(H-h)$

(iii) 역학적에너지 $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mg(H-h) + mgh = mgH$

역학적에너지는 처음에 주어진 값 mgH 로 일정

연습 5-5 : 질량이 m이며 속력이 v_0 인 물체가 마찰이 없는 표면에서 미끄러지다가 용수철 상수가 k 인 용수철에 부딪쳤다. 운동하던 물체에 의한 용수철의 최대 수축 거리를 구하여라.

풀이



물체의 운동에너지는 모두 탄성력에 의한 위치에너지로 바뀌었다. (역학적 에너지 보존)

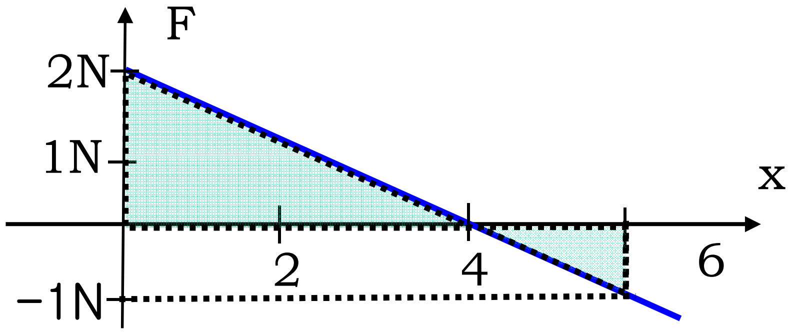
$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{m v_0^2}{k}} = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0$$

연습 5-6 : 다음 그래프는 일직선 상을 운동하는 질량이 1kg 인 물체에 가하여진 힘 F 를 물체의 위치의 함수로 나타낸 것이다.

풀이



(가) 물체가 x=0 에서 x=6m 까지 움직였을때 힘 F 가 한 일은?

F-x 그래프의 면적은 일과 같으므로 직접 빗금친 면적을 구하거나 적분값을 구한다

AREA= $$W=\int Fdx=\int_{x=0}^{x=6}\left(-\frac{1}{2}x+2\right)dx=-\frac{1}{4}x^2+2x\Big|_{x=0}^{x=6}=3J$$

(나) 물체가 x=0 에서 정지해 있었다면 x=6m 에서 물체의 속도는?

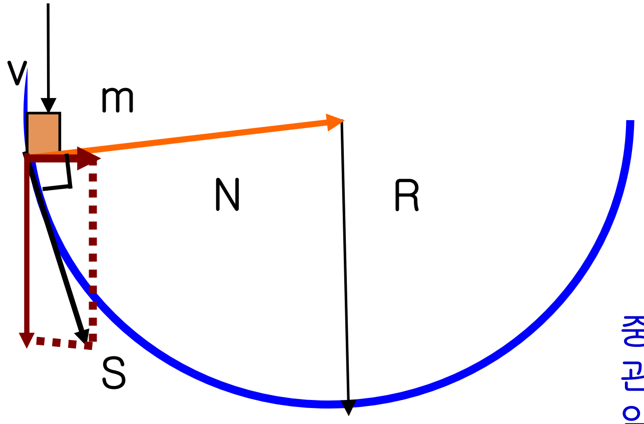
일-에너지 정리에서 물체에 해 준 일은 운동에너지의 변화량과 같으므로

$$W(\text{일})=\Delta KE=\frac{1}{2}mv^2-0=3J\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2\times 3J}{1kg}}=\sqrt{6}(m/s)$$

연습 5-7: 반구 모양 그릇에 질량 m의 물체가 그릇의 한 쪽면 끝쪽에서 v의 속력으로 입사하여 그릇의 안쪽 면을 따라 미끄러진다.

풀이

처음 역학적에너지는 위치에너지 mgR 과 운동에너지 $\frac{1}{2}mv^2$ 이다.



(가) 마찰이 없을 때 그릇 바닥에서의 물체의 속력은?

역학적에너지는 보존되므로

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$v' = \sqrt{v^2 + 2gR}$$

(나) 마찰이 있을 때, 물체는 진동하다가 정지하는데 그 때까지 중력이 한일은?

중력은 보존력이므로 경로에 무관하고 처음과 나중의 위치로만 일을 구함

$$W = F \cdot S = mg\vec{j} \cdot y\vec{j}$$

$$= mgy\Big|_{y=0}^{y=R} = mgR$$

(다) (나)의 경우 정지할 때까지 수직항력이 물체에 한일은?

수직항력은 경로와 항상 수직이므로 일은 0이다

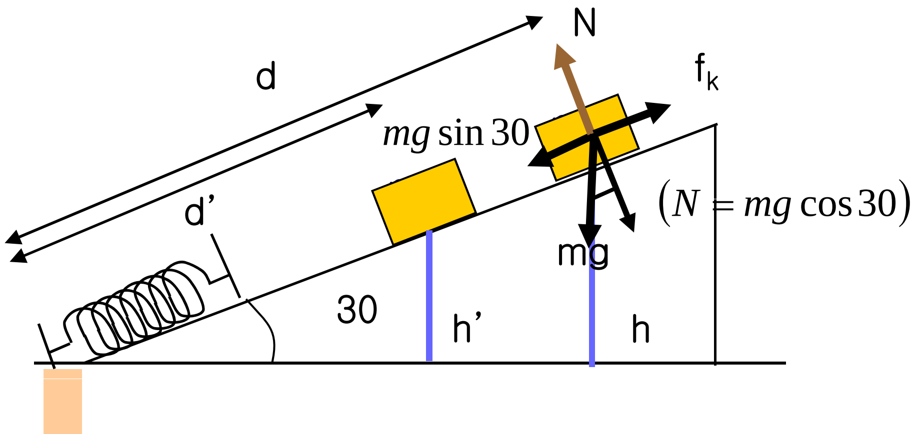
$$W = N \cdot r = Nr\cos 90^\circ = 0 \qquad (\because \; N \perp r)$$

(라) 정지할 때까지 마찰력이 한일은?

$$W(전체일) = W_{중력} + W_{수직항력} + W_{마찰력} = \Delta KE$$ (일-에너지 정리에서)

$$W = mgR + 0 + W_{마찰력} = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \therefore W_{마찰력} = -\frac{1}{2}mv^2 - mgR$$

연습 5-8 아래 그림과 같이 지면과 30° 의 각도를 갖는 비탈면의 바닥에 용수철 상수 k 인 용수철이 놓여 있다. 이제 지면으로 부터 수직 거리 h 인 비탈면상의 지점에서 벽돌을 가만히 놓는다. 비탈면과 벽돌 사이의 마찰계수는 μ_k 이고 용수철의 길이는 매우 작으며 k는 충분히 크다고 가정하자.



풀이

(가) 벽돌이 제일 아래에 도달할 때까지 수직항력이 한일은 얼마인가?

$$W_{수직항력} = \vec{N}\cdot\vec{d} = 0 \ \Leftarrow \left(\vec{N}\perp\vec{d}\right)$$

(수직항력은 경로에 수직하므로 일을 하지 않음)

벽돌이 h 위치에서 제일 아래에 도달할 때까지 마찰력이 한 일

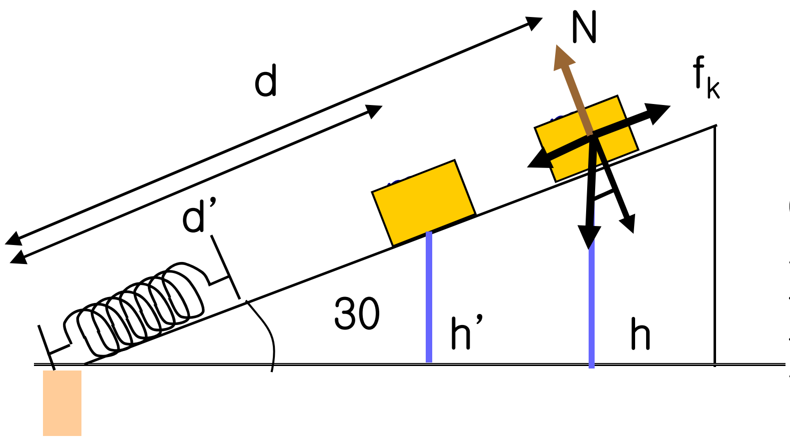
$$W_{마찰력} = \vec{f}\cdot\vec{d} = -fd$$

벽돌이 아래에서 h' 위치에 도달할 때까지 마찰력이 한 일

$$W_{마찰력} = \vec{f}\cdot\vec{d}' = -fd'$$

(다) 벽돌이 용수철과 부딪친 후 다시 벽돌이 오르는 최고 수직거리 h' 는 얼마인가?

$$\left(N = mg\cos 30\right)$$



(내려갈 때)

(1)Mgh 에서 마찰력에 의한 일을 뺀 값은 용수철의 탄성 에너지로 저장되고

$$\mathbf{mgh - f_k}d = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (1)$$

(올라갈 때)

(2) 용수철의 탄성 에너지에서 마찰력에 의한 일을 뺀 값은 h' 높이 까지 올라가는 물체의 위치에너지와 같아야 한다

$$\frac{1}{2}kx^2 - \mathbf{f_k}d' = mgh' \qquad (2)$$

$$mgh - f_k d = mgh' + f_k d'$$

즉, h 높이에서 벽돌이 비탈면을 내려왔다가 다시 h' 위치까지 올라갈 때 일과 에너지 정리에 의하면 합력(수직항력, 중력, 탄성력, 마찰력)이 한 일은 운동에너지의 변화량은 같아야 한다. h 위치와 h' 위치에서의 운동에너지는 0 이고 수직항력이 한 일과 탄성력이 한 일은 각각 0 이므로 중력에 의한 일과 마찰력이 한 일의 합은 0 이 되어야 한다.

$$\therefore W = \Delta KE \Rightarrow mg(h - h') - f_k(d + d') = 0 \Rightarrow (1 - \sqrt{3}\mu)h = (1 + \sqrt{3}\mu)h'$$

$$\begin{cases} f_k d = (\mu N)d = \mu mg\cos 30 \cdot \left(\dfrac{h}{\sin 30}\right) = \sqrt{3}\mu mgh \\ f_k d' = (\mu N)d' = \mu mg\cos 30 \cdot \left(\dfrac{h'}{\sin 30}\right) = \sqrt{3}\mu mgh' \end{cases}$$

$$\therefore h' = \frac{1 - \sqrt{3}\mu}{1 + \sqrt{3}\mu}h$$

연습 5-9 **3kg 물체에 힘을 가해 시간에 따른 위치의 변화가 $x = 3t - 4t^2 + t^3$ 일 때 4초 동안의 힘이 한 일을 구하라**

풀이

일-에너지 정리에 따라 일은 운동에너지의 변화량과 같으므로
x 에 대한 식을 미분하여 속력을 구하고 운동에너지를 구하면 된다

$$W = \Delta KE$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{t=4} - \frac{1}{2}mv^2\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\cdot 3(19^2 - 3^2) = 528J$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = 3 - 8t + 3t^2}$$

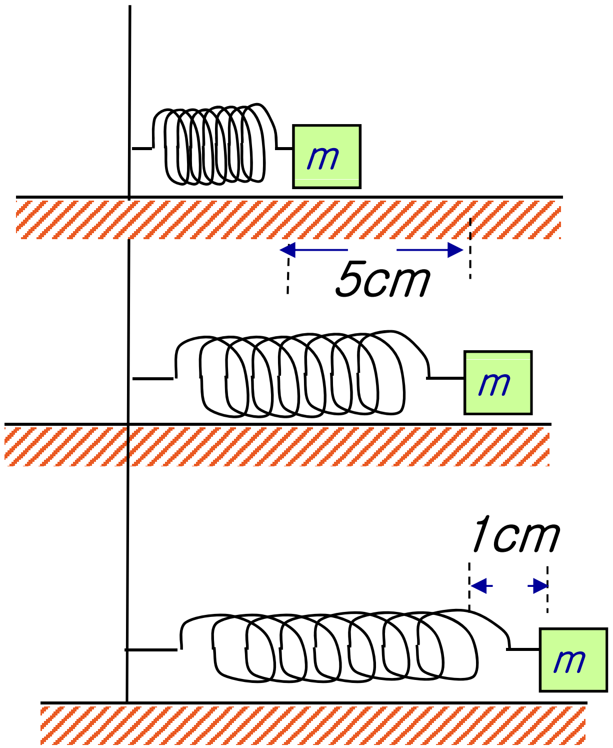
(속력은 x 에 대한 미분)

$t = 4$ 일 때 $v(4) = 19,$

$t = 0$ 일 때 $v(0) = 3$

연습 5-10 : 코르크를 발사하는 장난감 총의 용수철이 5.00cm 압축되었다가 평형상태에서 1.00cm 더 늘어났을 때 코르크는 용수철로 부터 이탈한다. 발사된 코르크의 속력은?

풀이



5cm 압축상태

평형상태

평형위치에서 1cm 늘어난 상태

역학적에너지 보존을 이용하여 푼다. 처음의 탄성에너지는 1.00cm 위치에서 운동에너지와 탄성에너지의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx^2\Big|_{x=1cm} + \frac{1}{2}mv^2\Big|_{x=1cm}$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)} = 2m/s$$

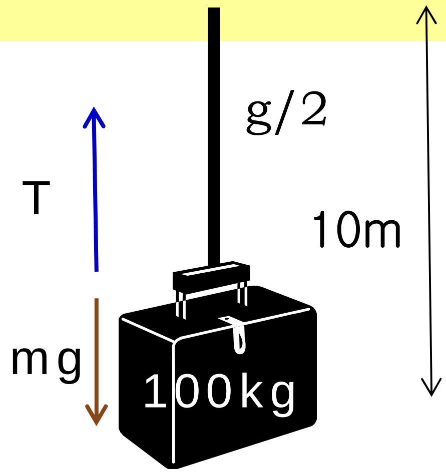
$$\begin{pmatrix} x_0 : 0.05m, & x : 0.01m, \\ k : 10.0N/m, & m = 0.006kg \end{pmatrix}$$

연습 5-11 : 긴 줄에 매달린 질량이 100kg 인 물체가 등가속도 a= g/2로 올라가고 있다. 지면에서의 속력을 0 m/s 라 하자. (단, 중력가속도는 $g= 10\ m/s^2$ 이다.)

(1) 지면에서 출발하여 10 m 지점까지 물체가 이동하는 동안 장력에 의한 평균 일률 은 얼마인가?

(2) 지점을 통과할 때 장력에 의한 순간 일률은 얼마인가?

풀이



운동방정식을 세우고 장력을 구한 다음 장력에 의한 일을 구한다

$$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g+a) = \frac{3}{2}mg \quad \left(\because a = \frac{g}{2}\right)$$

$$\Delta W_{장력} = T \cdot (h-0) = \frac{3}{2}mgh$$

$$\therefore \Delta W_{장력} = \frac{3}{2}mgh = \frac{3}{2}(100kg)\cdot(10m/s^2)\cdot(10m) = 15000J$$

장력이 일을 한 시간은 물체가 등가속도 g/2 로 운동하면서 h 만큼 올라가는데 걸린 시간이므로

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = t = \sqrt{\frac{2h}{\left(\frac{g}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{4h}{g}} \qquad \therefore t = \sqrt{\frac{4h}{g}} = \sqrt{\frac{4\cdot(10m)}{10m/s^2}} = 2.0s$$

따라서 물체가 이동하는 동안의 장력의 평균일률은 :

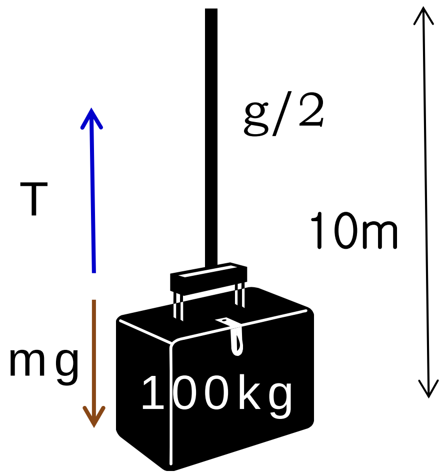
$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{t-0} = \frac{15000J}{2.0s} = 7{,}500W$$

연습 5-11 : 계속

(2) h=10m 지점을 통과할 때 장력에 의한 순간 일률은 얼마인가?

풀이

10 m 지점에서의 물체의 속력은



$$v = v_0 + at \Rightarrow v = at$$

$$\therefore v = at = \frac{gt}{2} = \frac{1}{2}(10m/s^2)\cdot(2.0s) = 10m/s$$

장력에 의한 순간일률은

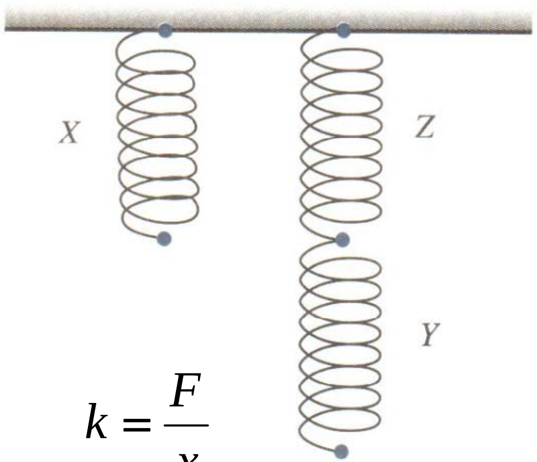
$$\frac{dW_{장력}}{dt} = \frac{dW_{장력}}{dt} = T \cdot v = \frac{3}{2}mgv$$

$$\frac{dW_{장력}}{dt} = \frac{3}{2}mgv = \frac{3}{2}(100kg)\cdot(10m/s^2)\cdot(10m/s) = 15,000W$$

연습 5-12 : 동일한 스프링 X, Y, Z 가 그림과 같이 매달려 있다. 3.0 kg 의 물체를 스프링 X 에 매달면 물체는 4.0 cm만큼 내려온다. 스프링 Y에 6.0 kg의 물체를 매달면 물체가 내려오는 길이는 얼마가 되겠는가?

풀이

같은 용수철을 병렬로 이으면 탄성계수는 2배로 증가하고 용수철을 직렬로 이으면 탄성계수는 $\frac{1}{2}$ 배로 줄어든다. (참고 연습문제 1번)



$$k = \frac{F}{x}$$

$$\boxed{F = kx = mg}$$

탄성계수가 k 인 X 스프링의 늘어난 길이는

$$x = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k} = 4\,cm$$

Y-Z 스프링의 탄성계수 : $k' = \frac{k}{2}$

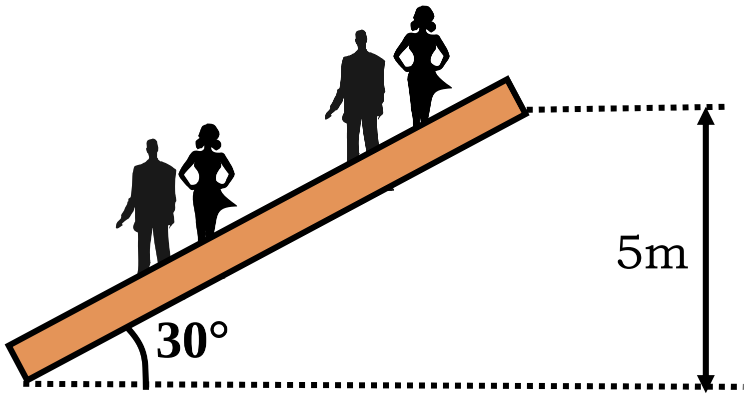
Y-Z 스프링에 작용한 힘 : $F' = 2F$

$$x' = \frac{F'}{k'} = \frac{2F}{\left(\frac{k}{2}\right)} = 4\left(\frac{F}{k}\right) = 4x \qquad \because x = 16cm$$

연습 5-13: 1분 동안 체중이 60kg 인 사람 20명이 에스컬레이터를 타고 1층에서 2층으로 올라간다. 에스컬레이터가 설치된 각도는 30도 이고 1층에서 2층까지의 높이가 5m 라면 에스컬레이터가 한 일률은?

풀이

일률은 단위시간 당의 에너지이므로 1분 동안 에스컬레이터가 중력에 대해 사람을 태우고 5m 높이를 올라간 일을 구한다



1분 동안 한일

$$\Delta W = F\Delta x = m_{전체질량}gh$$

일률 $$p = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$p = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{m_{전체질량}gh}{\Delta t} = \frac{(20 \times 60kg) \times 10m/s^2 \times 5m}{60\sec} = 1000(J/s) = 1000(W)$$

연습 5-14 **어떤 순간에 한 입자의 속도가** $v = -(4m/s)\hat{i} + (3m/s)\hat{k}$ **이고 이 입자에 힘** $F = (2N)\hat{i} - (5N)\hat{j} + (3N)\hat{k}$ **이 작용하고 있다. 이 힘이 입자에 한 순간 일률은 얼마인가?**

풀이

순간 일률은 단위시간당 일이므로

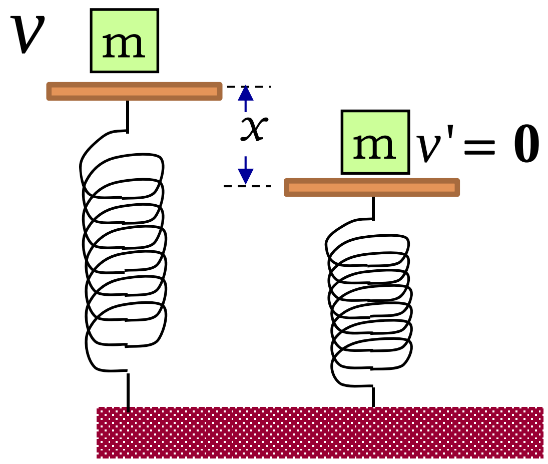
$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$$

$$= (2)\cdot(-4) + (-5)\cdot(0) + (3)\cdot(3) = 1\,(W)$$

연습 5-15: 아래 그림과 같이 질량이 m인 물체가 용수철 상수가 k 인 용수철에 수직으로 떨어진다. 이 물체가 순간적으로 정지할 때까지 용수철은 길이 x 만큼 수축하였다. 이 물체가 용수철을 치기 직전 물체의 속력은 얼마이겠는가? (단, 중력가속도는 이고 용수철의 질량은 무시한다.)

풀이

일 -에너지 정리 : 질량 m 의 물체가 용수철을 수축하는 동안 용수철에 작용한 합력은 운동에너지 변화량과 같다.



$$W_{합력} = \Delta KE$$

$$\begin{cases} W_g = -mg \\ W_k = \frac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$

$$W_{합력} = W_g + W_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$-mgx + \frac{1}{2}mx^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 - 2gx}$$

연습 5-16

x 축을 따라 움직이는 질량이 m 인 물체에 거리에 따라 변하는 힘 $F = -ax^2$이 x 축방향으로 작용한다. 물체의 위치 $x = x_1$ 에서의 속도가 v_1 일 때 $x = x_2$ 에서의 속도는얼마인가?

풀이

일-에너지 정리에 따라 구한다.

즉, 합력에 의한 일은 운동에너지의 변화량과 같다. $\boldsymbol{W = \Delta KE}$

따라서 변화하는 힘에 의한 일을 적분을 통해 구하면 운동에너지의변화량을 알 수 있으므로 다른 위치에서의 속도를 구할 수 있다

$$W = \int F dx = \int_{x_1}^{x_2} -ax^2 dx = \frac{1}{2} m v_2^{\,2} - \frac{1}{2} m v_2^{\,2}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^{\,2} = \frac{2}{3} a\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right) + \frac{1}{2} m v_1^{\,2}$$

$$\therefore v_2 = \sqrt{\frac{2}{3m} a\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right) + v_1^{\,2}}$$

예제5-6: 야구 선수가 속도 v로 날아오는 질량 m 인 야구공을 잡았다. 선수가 공을 잡았을 때 글러브가 뒤로 d 만큼 움직였다. 글러브의 가속도가 일정했다면 공을 멈추게 한 힘의 크기는?

풀이

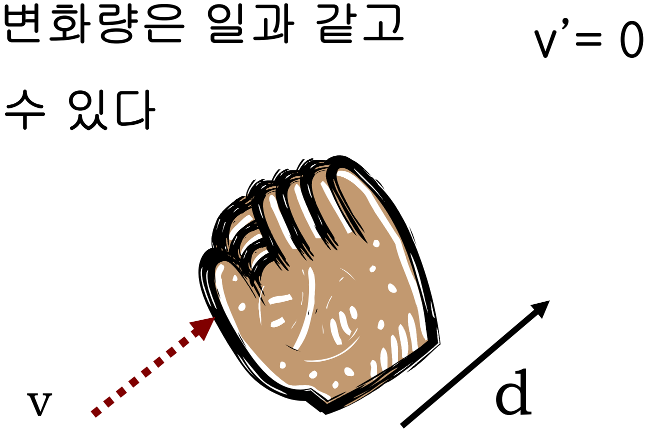
일-에너지 정리에 따라 운동에너지의 변화량은 일과 같고

일은 힘과 경로의 곱이므로 힘을 구할 수 있다

$$W = K - K_0 = \Delta K$$

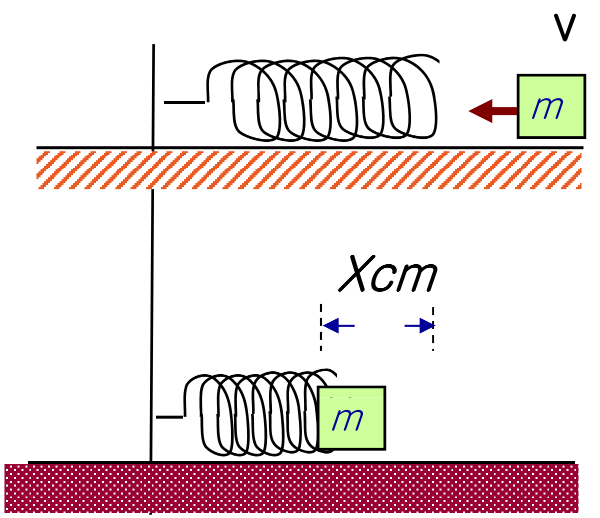
$$W = Fd = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$F = -\frac{mv^2}{2d}$$



예제 5-10 : 질량이 m인 물체가 마찰없는 수평면위에서 속도 v로 움직여 고정되어 있는 용수철에 부딪쳐 용수철을 압축한다. 이 물체의 운동에너지와 용수철의 위치에너지가 같은 순간 스프링은 얼마나 압축되었는가?

풀이



$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

x 위치에서 운동에너지와 용수철의 위치에너지가 같아진다고 하자.

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

역학적에너지 보존을 이용하여 푼다. 처음에 운동에너지는 x 위치에서도 보존되므로

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv'^2 = kx^2$$

$$x = \sqrt{\frac{m}{2k}}\,\mathrm{v}$$