제 9 장 연습 / 예제문제

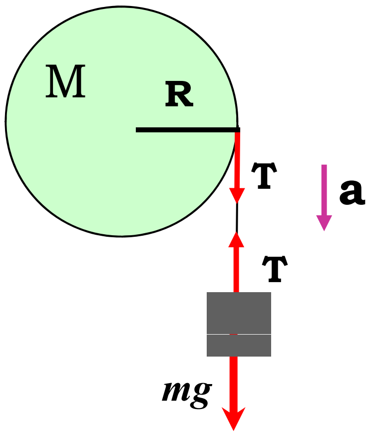
연습문제	홈페이지 예제문제
9-1	9-2
9-2	9-12
9-3	9-17
9-4	9-19
9-6	
9-7	
9-8	
9-9	
9-10	

연습 9-1. 질량이 M 이고 반지름이 R 인 원반 모양의 도르래에 질량이 m 인 물체가 매달려 있다. 실의 질량은 무시할 수 있고 도르래와 고정 축 사이의 마찰은 무시할 수 있다. 물체의 가속도를 구하여라.

풀이

원판의 회전관성 : $\left(\mathbf{I} = \frac{1}{2}MR^2\right)$,

각가속도와 접선방향 가속도의 관계 : $\left(\alpha = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{R}}\right)$



$$\begin{cases} \tau = I\alpha \\ \tau = RT\sin 90 = RT \qquad (\mathbf{R} \perp \mathbf{T}) \end{cases}$$

(토오크) $\tau = I\alpha = r_{\perp}T = RT$ ①

(병진힘) $mg - T = ma \quad \Rightarrow \quad T = m(g\text{-}a)$ ②

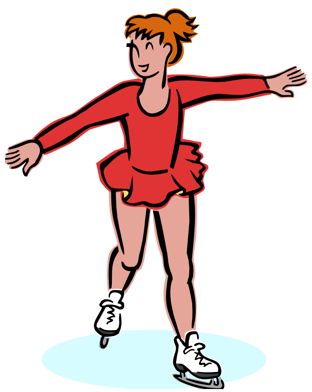
①,② 을 연립하면 → $I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) = R\mathrm{m}(\mathrm{g} - \mathrm{a})$

$$a\left(\frac{1}{2}MR + mR\right) = \mathrm{Rmg}$$

$$\therefore\ a = \frac{2mg}{(M + 2m)}$$

연습 9-2. 피겨스케이팅 선수는 제자리에서 빨리 회전하기 위해서 팔을 오무린다. 그 이유를 설명하라.

풀이



외부 토오크가 없으면 각운동량은 일정하게 보존된다.

회전하던 피케스케이팅 선수가 팔을 오므리면 회전관성이 작아지게 되는데 외부토오크가 없다면 각속도는 증가하여 전체 각운동량을 일정하게 만든다.

즉 팔을 오므리면 더 빨리 회전하게 된다.

$$L = I_i \omega_i$$

$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i$$

$$\text{If} \quad I_f < I_i \;, \quad \text{then} \quad \omega_f > \omega_i$$

연습 9-3 일정한 각속도로 회전하던 별이 붕괴되어 회전관성이 1/3 으로 줄어 들었다. 붕괴된 후의 별의 각속도를 구하여라.

풀이

만유인력은 중심방향이므로 토크에 영향을 주지 않는다.

즉 외부 토크가 0 이므로 각운동량은 보존된다

$$L = I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

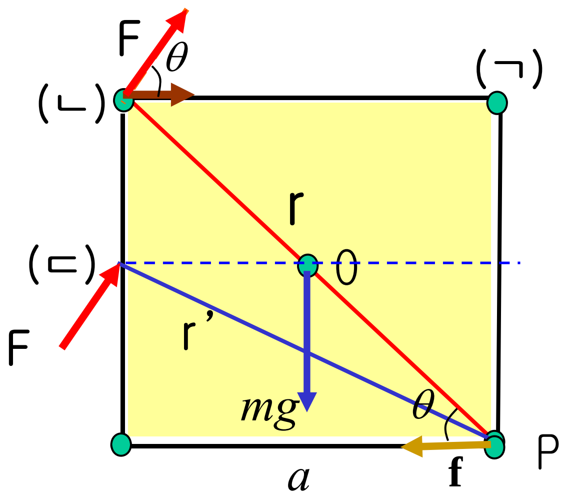
$$I_f = \frac{1}{3} I_i$$

$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{I_i}{\left(\frac{I_i}{3}\right)}\omega = 3\omega_i$$

연습 9-4 그림과 같이 질량 중심이 O 에 위치한 상자가 일정한 최대 정지마찰계수를 갖는 지면에 놓여 있다. 들거나 밀어 움직이기에는 상자가 너무 무거우므로 이제 이 상자에 F 의 크기를 갖는 힘을 가하여 점 P 를 중심으로 하여 오른쪽으로 굴려 움직이려고 한다.

풀이

$$\tau = rF \sin\theta = r_{\perp}F = rF_{\perp}$$



상자가 미끄러지지 않을 조건

$F\cos\theta \le f_{\max}$(최대정지마찰력)

(가) 힘의 크기 F 를 최소로 하려면 상자의 어느 곳에 힘을 작용하여야 하는가?

(ㄴ): 토오크는 회전 반경과 반경에 수직인 힘에 비례하므로 회전 반경인 **d** 가 커야 회전력이 커짐

(나) (ㄷ)에 힘이 작용한다면 가장 효과적인 힘의 방향은?

r' 에 수직한 방향

(다) 상자를 굴리는데 기여하지 않는 힘은?

마찰력 (회전축에 작용하므로 회전팔 r 이 0 이다. 즉 토오크가 0 이다.

[참고] (ㄴ)에서 상자를 회전하기 위한 최소힘은 얼마인가?

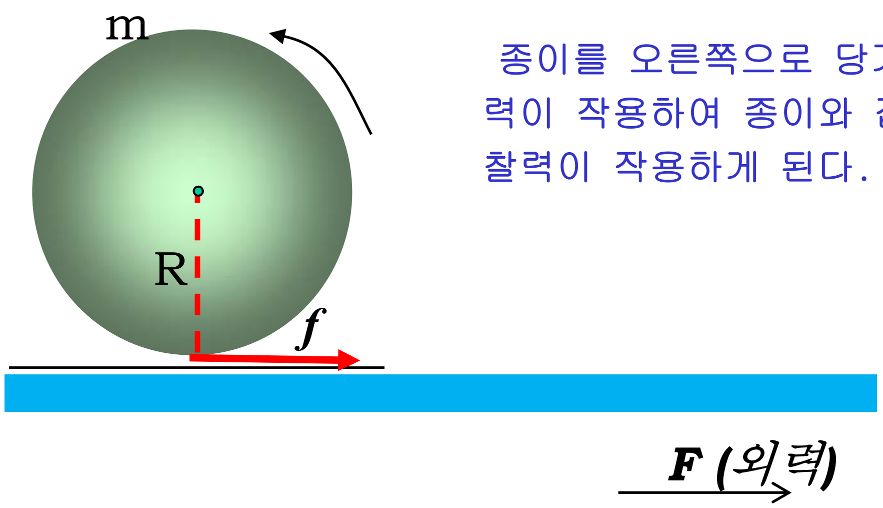
상자를 굴러가게 하려면 질량중심에 작용하는 중력(상자의 무게)에 의한 토오크 보다 더 큰 토오크를 반대방향으로 주면 된다.

$$\tau = rF \ge mg\frac{a}{2} \Rightarrow \therefore F \ge mg\frac{a}{2r}$$

9-5 그림과 같이 종이 위에 원통형의 물체가 정지하여 있다. 이제 종이를 오른 쪽으로 잡아 당긴다. 물체와 종이 사이에는 마찰력이 작용하여 물체는 미끄러지지 않는다.

풀이

(가) 원통형 물체의 질량 중심은 어느 방향으로 움직이는가?



종이를 오른쪽으로 당기면 원통 물체의 중심은 그 자리에 머물려는 관성력이 작용하여 종이와 접촉점에서 관성력을 방해하는 오른쪽 방향으로 마찰력이 작용하게 된다. 이 마찰력의 크기는 종이에 작용한 외력과 같다.

$$(f = F)$$

물체에 작용하는 외력은 마찰력이므로 질량 중심은 작용한 외력의 방향으로 움직이게 된다.

그러므로 질량중심은 오른쪽으로 이동 한다.

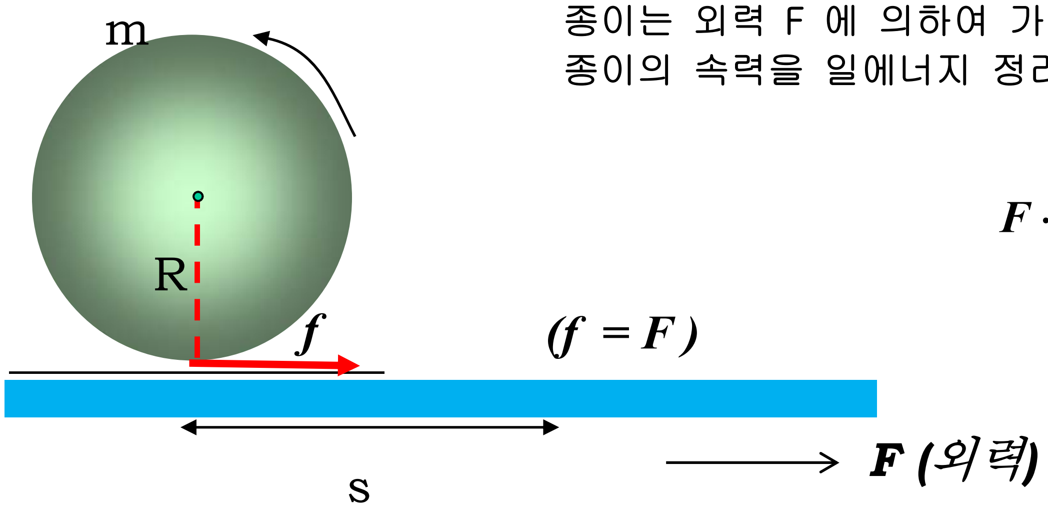
(나) 원통형 물체는 질량 중심에 대해 어느 방향으로 회전하는가?

$$\tau = Rf = I\alpha$$ 원통형 물체는 반시계 방향으로 회전한다.

9-5 참고 설명

마찰력에 의해 물체는 반시계방향으로 회전되어 종이에 상대적으로 반대 방향으로 굴러가는 것으로 보인다. 그러나

종이는 외력 F 에 의하여 가속되고 있으므로 거리 s 만큼 갔을 때 종이의 속력을 일에너지 정리에 의해 구하면



$$F \cdot s = \frac{1}{2} m v_{종이}^{2} \quad \Rightarrow v_{종이} = \sqrt{\frac{2F \cdot s}{m}}$$

$$(f = F)$$

이고 원통형물체의 s 만큼 움직인 거리에서의 속력은

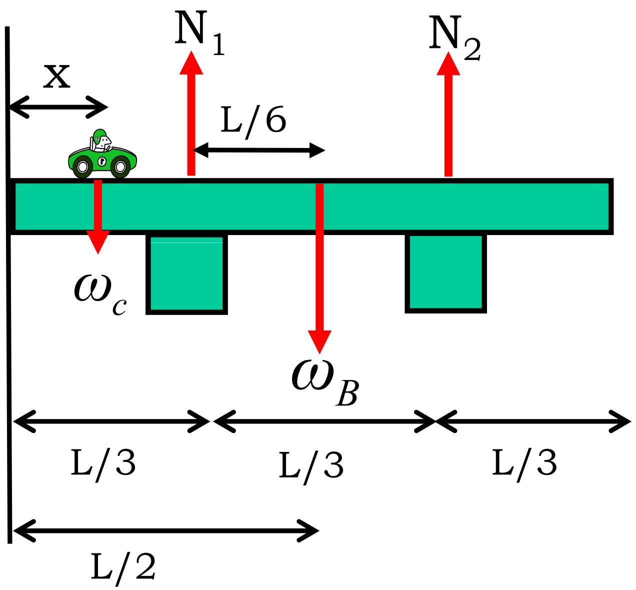
$$f \cdot s = F \cdot s = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m v^2 = \frac{3}{4} m v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{4F \cdot s}{3m}} \qquad \therefore v < v_{종이} \qquad (원통) \left(I = \frac{1}{2} m R^2, \quad v = R\omega\right)$$

이 된다. 즉, 원통형물체의 속력은 종이의 속력보다 상대적으로 작아 종이위에서 뒤에 굴러가는 상태로 보이지만 실제는 외력에 의해 처음 출발한 위치에 대해 s 만큼 질량중심이 오른쪽으로 이동되어 있다.

연습 9-6 그림과 같이 두개의 동일한 기둥위에 균일한 밀도를 갖는 콘크리트 판을 얹어 높은 다리가 있다. 이 다리 위를 자동차가 지나갈 때 왼쪽과 오른쪽 기둥이 받게 되는 힘은 다리에 수직하다. 그 힘의 세기를 각각 N_1, N_2 라 하자. 자동차의 위치 x 가 일 때 N_1, N_2 를 구하라.

풀이 정적 평형 조건은 병진 힘과 외부 토오크의 합이 모두 0 임을 이용하여 구한다.



병진 힘의 합 $N_1 + N_2 = \omega_c + \omega_B$ (1)

다리의 중심을 회전축으로 한 토오크의 합을 구하면

$$\frac{L}{6}N_1 - (\frac{L}{2} - x)\omega_c - \frac{L}{6}N_2 = 0$$

$$\Rightarrow N_1 - N_2 = (3 - \frac{6}{L}x)\omega_c = 0 \qquad (2)$$

((1)식과 (2)식)을 더하고 2로 나누면 $N_1 = (2 - \frac{3}{L}x)\omega_c + \frac{\omega_B}{2}$

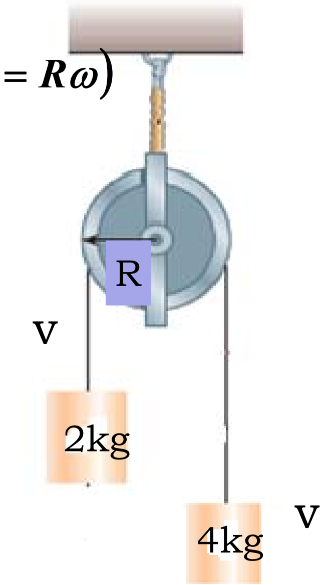
((1)식에서 (2)식)을 뺀 다음 2로 나누면 $N_2 = (\frac{3}{L}x - 1)\omega_c + \frac{\omega_B}{2}$

연습 9-7 회전관성이 4.5 x 10^{-3} kg·m^2 이고 반지름이 3.0 cm·인 도르래가 천장에 매달려 있다. 도르래에 걸쳐져 있는 줄은 양쪽 끝에 각각 2.0 kg , 4.0 kg 인 나무토막을 매달고 도르래에서 미끄러짐이 없이 움직인다. 무거운 나무토막의 속도가 2.0 m/s 일 때 도르래와 두 나무토막의 전체 운동에너지는 얼마인가?

풀이 두 나무토막은 연결되어 있으므로 속력은 같다. V=2.0 m/s

또한 나무토막의 속력은 줄의 속도와 같으므로 도르래의 회전각속도 $\omega = \frac{v}{R} \quad (v = R\omega)$

물체의 전체 운동에너지는 회전운동과 병진운동에너지의 합이므로



$$KE = \tfrac{1}{2} m_1 v^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 v^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v^2 + \tfrac{1}{2} I \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) v^2$$

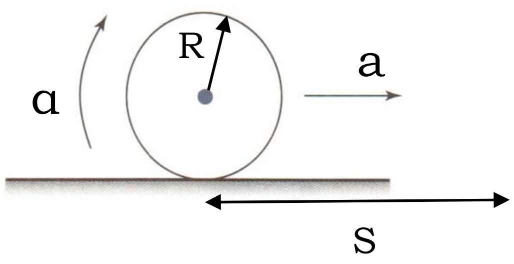
$$= \tfrac{1}{2}\left(2.0kg + 4.0kg + \frac{4.5 \times 10^{-3} kg \cdot m^2}{(3.0 \times 10^{-2} m)^2}\right) \cdot (2.0 m/s)^2$$

$$= 22(J)$$

연습 9-8 아래 그림과 같이 반지름이 0.5 m인 바퀴가 수평면 위에서 미끄러짐 없이 굴러간다. 정지해 있다가 출발한 바퀴는 일정한 각가속도 6 rad/s^2을 가지고 움직인다. t=0 초에서 t=3초까지 바퀴가 움직인 거리는 얼마인가?

풀이 병진 운동의 가속도는 회전 운동의 접선방향의 가속도와 같다.

$$a = r\alpha$$
$$= 0.5\ m \times 6 rad/s^2 = 3\ m/s$$



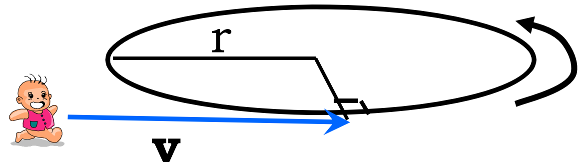
바퀴의 처음 속력은 정지해 있었으므로 $v_0 = 0$

바퀴가 등가속운동을 하는 동안 3초 사이에 움직인 거리 s 는

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t$$
$$= \tfrac{1}{2} \times 3m/s^2 \times (3s)^2 + 0 = 13.5m$$

연습 9-9 반경이 r 이고 회전관성이 I 인 회전놀이 기구가 정지해 있다. 이 때 질량 m 인 아이가 가장 자리에서 접선을 따라 v 의 속도로 달려와 놀이 기구에 올라탔다. 회전 놀이 기구의 각속도는 얼마인가?

풀이



외부 토크가 없으므로 각운동량 보존되어야 한다.

처음 각운동량 : $L_i = rp_\perp = rmv\sin 90 = rmv$

나중 각운동량 : $L_f = \left(I + mr^2\right)\omega$

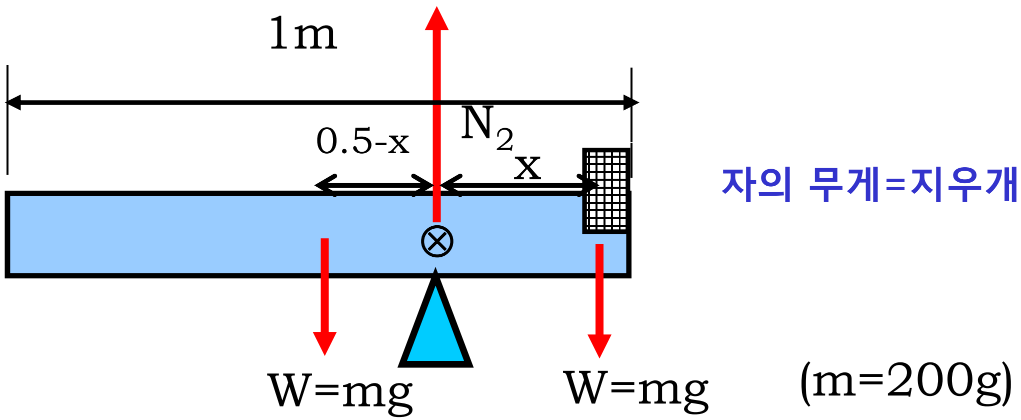
$$\boxed{L_i = L_f}$$

$$\therefore \quad \omega = \frac{rmv}{\left(I + mr^2\right)}$$

연습 9-10 질량이 200 g 인 균일한 100 cm길이의 자가 있다. 자의 오른쪽 끝 지점에 200 g 의 지우개가 올려져 있을 때 균형을 유지하려면 받침대는 어느 위치에 있어야 하는가?

풀이

자의 질량중심은 자의 가운데에 있고 지우개는 오른쪽 끝에 있으므로 균형을 이루는 위치를 오른쪽으로 부터 x 라 하면 x 점에 대한 토오크의 합이 0 이 되어야 한다.



자의 무게=지우개의 무게

오른쪽에서 x 만큼 떨어진 점에서 막대가 균형을 이룬다고 하면 이 점을 중심으로 한 토오크의 합은 0 이다.

토오크의 합 $= 0$: **(0.5 - x)W = xW**

$\therefore$ **x = 0.25 *m*** (왼쪽부터 **75cm** 떨어진 곳)

또는 지우개와 자의 균형점을 이루는 점을 구하는 것이므로 자와 물체를 합한 두 물체의 질량중심을 구해도 된다.

예제 9-2 알루미늄으로 만든 단단한 두개의 원통 A와 B 가 있다 A의 회전관성은 B의 몇 배인가?

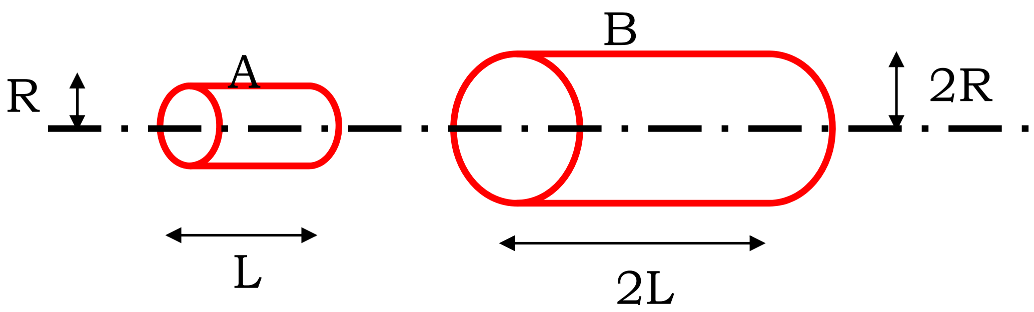
풀이

원통 A와 B 의 회전관성 $I_A = \frac{1}{2} M_A R^2$ $I_B = \frac{1}{2} M_B (2R)^2$

질량은 밀도(ρ)와 부피를 곱한 값이므로

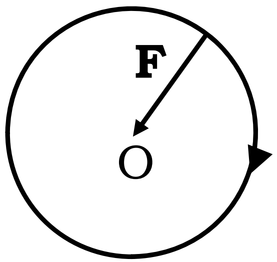
원통 A와 B 의 질량: $M_A = \rho\left(\pi R^2 L\right)$, $M_B = \rho\left(\pi (2R)^2 (2L)\right) = 8M_A$

$$\therefore \frac{I_A}{I_B} = \frac{\frac{1}{2} M_A R^2}{\frac{1}{2} M_B (2R)^2} = \frac{1}{32}$$



예제 9-12 0.5 m 의 줄에 묶인 2.0kg 인 돌이 일정한 각속도 12 rad/s 로 원을 그리며 그리며 회전한다. 원의 중심에 대한 돌의 토크는 얼마인가?

풀이



$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (\omega = \text{일정})$$

$$\therefore \quad \tau = I\alpha = 0$$

일정한 각속도 이므로
돌의 각가속도는 0 이다.

또는

등속 원운동은 구심력만 작용하며 접선방향의 가속도는 0 이다. 즉 돌의 각가속도는 0 이다.

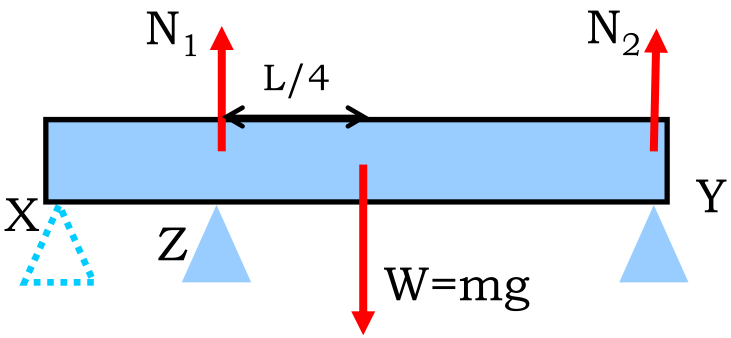
$$\tau = rF\sin\theta = 0 \qquad \left(\because \ \mathbf{r} \, // \, \mathbf{F} \Rightarrow \sin 0 = 0\right)$$

일정한 각속도 이므로 돌의 각가속도는 0 이다.

예제 9-17 그 림과 같이 균일한 막대기가 x 와 y 지점에서 동일한 힘 120 N 에 의해 지지된다. X 지점의 지지대가 Z 지점으로 이동할 때 Y 에 부여되는 힘은 얼마인가?

풀이

정적 평형 조건은 병진 힘과 외부 토오크의 합이 모두 0 이다.



병진힘의 합 : $N_1 + N_2 = W = 240\ N$ (1)

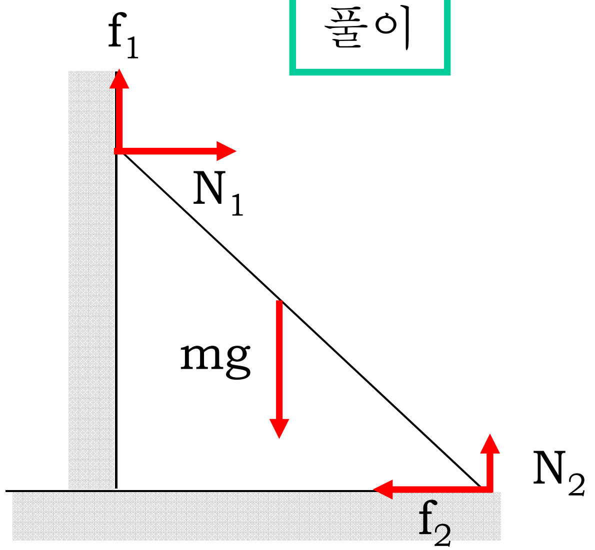
토오크의 합 : $\frac{L}{4}N_1 - \frac{L}{2}N_2 = 0 \Rightarrow N_1 = 2N_2$ (2)

막대의 중심을 회전축으로 한 토오크의 합은 모두 0 이다.

(1), (2) $\Rightarrow N_2 = 80\ N$

예제 9-19 그림과 같이 사다리가 벽에 기대어 있다. 사다리가 미끄러지지 않는다면 다음 설명 중 옳은 것은?

풀이



$\mathbf{f}_1 = \mu_1 N_1$ (μ_1 : 마루 마찰계수)

$\mathbf{f}_2 = \mu_2 N_2$ (μ_2 : 벽 마찰계수)

병진힘 :

x 방향 : $N_1 = f_2$

y 방향 : $N_2 + f_1 = mg$

∴ N_1 과 크기가 같고 반대방향인 f_2 가 반드시 있어야 평형이 된다. 마찰력이 있으므로 마찰계수도 0 일 수 없다.

따라서 **f_2** 는 **0** 이아니다.(∴ 마찰계수 **≠ 0)**

f_1 은 **0** 일 수도 있지만 **0** 이 아니라 해도 y 방향으로 평형이 유지될 수 있다.

그러므로 벽의 마찰계수는 반드시 **0** 일 필요는 없다.