제 2 장 연습 문제 및 예제문제

연습문제

2-1

2-2

2-3

2-4

2-5

2-6

2-7

2-8

2-9

2-10

2-11

홈페이지

예제문제

2-1

2-3

2-5

2-9

2-11

2-13

연습 2-1

일상생활에서 경로보다 변위가 중요한 경우를 한 가지만 제시하라.

풀이

당구를 칠 때 몇 번 쿠션을 튕기는 것보다 결국 표적의 공을 맞히기만 하면 된다.

어느 고속도로를 경유하던 간에 서울만 가면 된다.

골프, 농구, 또는 축구할 때 경로야 어떻든 결국 최종 목적지는 골인하는 것이다.

택배물건이 (얼마나 돌게 되던) 목적지에 잘 도착했는지가 중요하다 .

연습 2-2

A=(1, -1, 2). **B**=(-1, 1, 3) 일 때에 다음을 계산하여라.

(가) **A** + **B** (나) **A** - **2B**

(다) **A** - **B** (라) **A** x **B**

풀이

(가) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(1-1)\mathbf{i}+(-1+1)\mathbf{j}+(2+3)\mathbf{k}=5\mathbf{k}$

(나) $\mathbf{A}-2\mathbf{B}=\{1-(-2)\}\mathbf{i}+(-1-2)\mathbf{j}+(2-6)\mathbf{k}=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$

(다) $\vec{A}\bullet\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=1\times(-1)+(-1)\times1+2\times3=4$

(라)

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\{-1\cdot3-2\cdot1\}\hat{i}+\{2\cdot(-1)-1\cdot3)\}\hat{\mathbf{j}}+\{1\cdot1-(-1)\cdot(-1)\}\hat{\mathbf{k}}$$

$$=-5\hat{\mathbf{i}}-5\hat{\mathbf{j}}$$

연습 2-3

식 (2.31a) 와 식(2.31b) 를 이용하여 식 (2.32)를 유도하라

풀이

$$\vec{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \qquad \vec{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

두 벡터 A 와 B의 성분을 각각 곱하고 벡터곱의 정의를 이용한다. 대각선 성분은 전부 없어지고 각 성분별로 정리하면 된다.

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

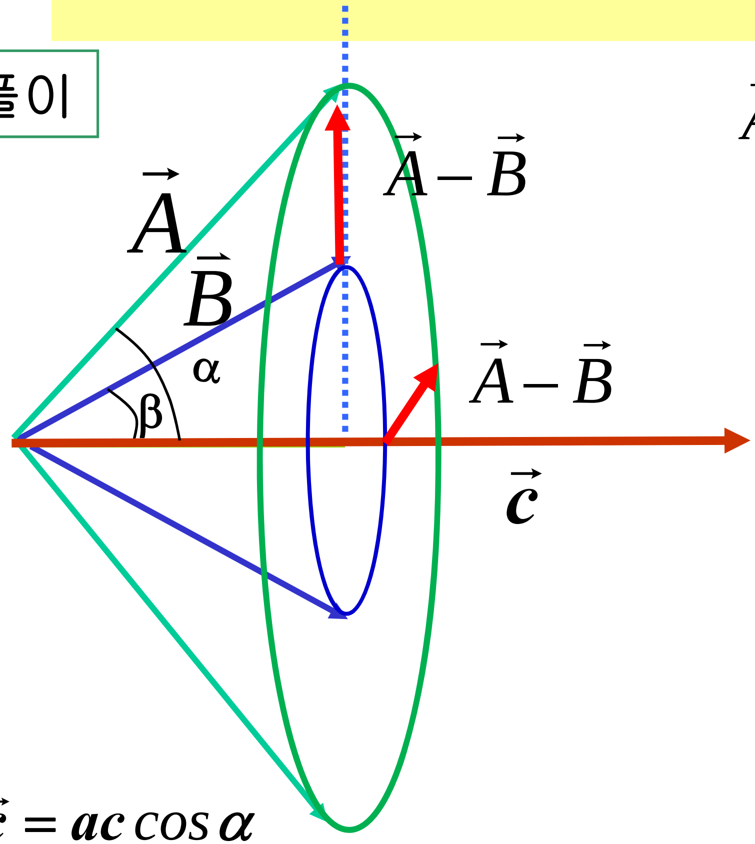
$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\times(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\
&= A_xB_x\cancel{(\mathbf{i}\times\mathbf{i})} + A_xB_y(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) \\
&\quad - A_yB_x(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + A_yB_y\cancel{(\mathbf{j}\times\mathbf{j})} + A_yB_z(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) \\
&\quad + A_zB_x\mathbf{k}\times\mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) + A_zB_z\cancel{(\mathbf{k}\times\mathbf{k})} \\
&= A_xB_y\mathbf{k} - A_xB_z\mathbf{j} - A_yB_x\mathbf{k} + A_yB_z\mathbf{i} + A_zB_x\mathbf{j} - A_zB_y\mathbf{i} \\
&= \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)
\end{aligned}$$

연습 2-4

크기가 0 이 아닌 세 벡터가 다음의 관계식을 가질 때 기하학적인 배치를 구하라

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}$$

풀이



$$\vec{A}\cdot\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}$$

$$\Rightarrow \left(\vec{A}-\vec{B}\right)\cdot\vec{C} = 0$$

$$\therefore \ \text{if } \vec{A}\neq\vec{B},$$

$$\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\perp\vec{C}$$

스칼라 곱의 정의에 따라 두 벡터 A 와 B의 차인 A-B 는 C 벡터와 수직한 관계가 된다.

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = ac\cos\alpha$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = bc\cos\beta$$

$$\Rightarrow a\cos\alpha = b\cos\beta$$

연습 2-5

두 벡터 **A**와 **B**가 이루는 사잇각이 θ 일 때 합벡터 **S(=A+B)** 의 크기가 다음과 같이 주어짐을 보여라

예제2.3 그림에서 벡터 C 의 크기를 A, B, θ 로 표시하여라

$$S = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

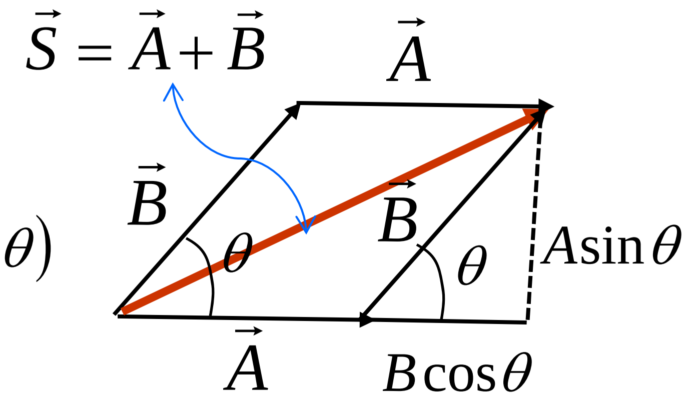
풀이

$$S = \sqrt{\vec{C}\bullet\vec{C}} = \sqrt{(\vec{A}+\vec{B})\bullet(\vec{A}+\vec{B})}$$

$$= \sqrt{\vec{A}\bullet\vec{A} + \vec{B}\bullet\vec{A} + \vec{A}\bullet\vec{B} + \vec{B}\bullet\vec{B}}$$

$$= \sqrt{A^2 + 2\vec{A}\bullet\vec{B} + B^2} \quad (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta)$$

$$\therefore S = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$



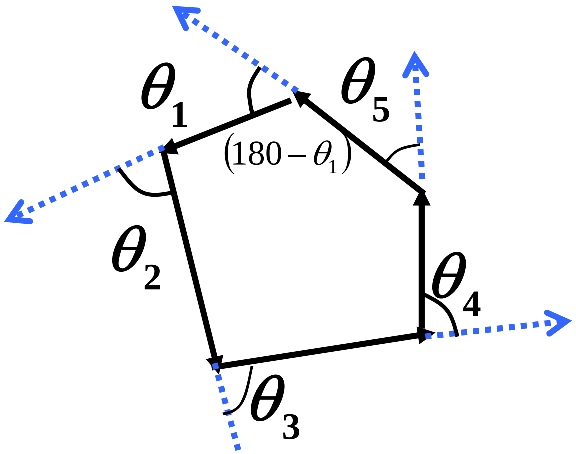
또는 그림에서 $S = \sqrt{(A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2}$

$$= \sqrt{A^2 + 2AB\cos\theta + B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$= \sqrt{A^2 + 2AB\cos\theta + B^2}$$

연습 2-6

평면상의 다섯벡터를 합쳐서 합이 0 일때 사잇각을 합치면 얼마인가?



벡터의 합은 0이 되어 오각형을 이루며 벡터와의 사잇각은 벡터의 꼬리와 꼬리 사이의 각이 되므로 각각 다각형의 외각이 된다

풀이

한편 오각형의 내각의 합은

$$(180-\theta_1)+(180-\theta_2)+(180-\theta_3)+(180-\theta_4)+(180-\theta_5)=540^\circ$$

$$(180\times 5)-(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5)=540^\circ$$

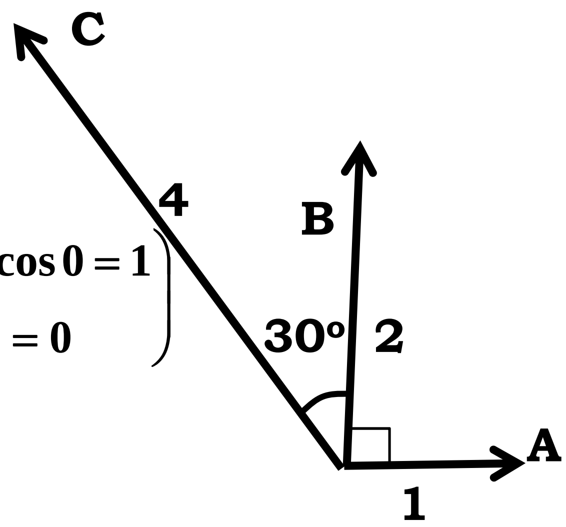
$$\therefore\ \ \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5=(180\times 5)-540=360^\circ$$

(또는 사잇각의 합은 다각형의 외각의 합이며 다각형의 외각의 합은 항상 360° 이다.)

연습 2-7

오른쪽 그림과 같이 크기가 각각 1, 2, 4 인 세 벡터 A, B, C 가 같은 평면상에 놓여 있다. 벡터 A 와 벡터 B 는 서로 수직이고 벡터 B 와 벡터 C 의 사잇각이 30º 일때 벡터 C는 벡터 A와 벡터 B 를 사용하여 C=αA+βB

로 나타낼 수 있다. 두 상수 α 와 β 를 구하여라.



풀이

A 와 B 는 수직이므로 A·B=0 임을 이용한다.

i) C 의 양 변에 A 를 곱하면

$$\Rightarrow \vec{C}\cdot\vec{A} = \left(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}\right)\cdot\vec{A} = \alpha\vec{A}\cdot\vec{A}+\beta\vec{B}\cdot\vec{A} = \alpha \quad \because \begin{pmatrix} \vec{A}\cdot\vec{A} = 1\cdot 1\cdot\cos 0 = 1 \\ \vec{B}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \alpha = \vec{C}\cdot\vec{A} = \left|\vec{C}\right|\left|\vec{A}\right| \cos 120^\circ = 4\cdot 1\cdot\cos 120^\circ = -2$$

ii) C 의 양 변에 B 를 곱하면

$$\Rightarrow \vec{C}\cdot\vec{B} = \left(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}\right)\cdot\vec{B} = \alpha\vec{A}\cdot\vec{B}+\beta\vec{B}\cdot\vec{B} = 4\beta \quad \because \begin{pmatrix} \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} = 0 \\ \vec{B}\cdot\vec{B} = 2\cdot 2\cdot\cos 0 = 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \beta = \frac{\vec{C}\cdot\vec{B}}{4} = \frac{\left|\vec{C}\right|\left|\vec{B}\right|\cos 30^\circ}{4} = \frac{4\cdot 2\cdot\cos 30^\circ}{4} = \sqrt{3}$$

연습 2-8

두 벡터 A 와 B 가 주어 졌을 때

$$\vec{C} = \vec{B} - \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|^2}\vec{A}$$ 는 벡터 A 에 수직임을 보여라.

풀이

벡터 C 와 벡터 A 가 수직이려면 $\vec{\boldsymbol{C}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=\mathbf{0}$ 이 되어야 한다.

벡터 C 에 대한 식의 양변에 벡터 A 를 스칼라 곱을 하면

$$\vec{C}\cdot\vec{A} = \left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right) - \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|^2}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right) = \vec{B}\cdot\vec{A} - \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|^2}\left|\vec{A}\right|^2 = \vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot\vec{B} = \mathbf{0}$$

$$\left(\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}\right)$$

0 이 되므로 $\therefore \vec{C} \perp \vec{A}$

(즉 벡터 C 와 벡터 A 는 수직이다)

연습 2-9

임의의 두 벡터 A 와 B 에 대해서 다음을 보여라.

$$(1) \quad \vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0$$

$$(2) \quad \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{A}$$

풀이

(1)

$$\vec{A}\times\vec{B}=\mathbf{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\mathbf{j}(A_zB_x-A_xB_z)+\mathbf{k}(A_xB_y-A_yB_x)$$

(방법 1) 직접 좌변의 벡터 곱을 위와 같이 성분별로 전개해서 증명한다.

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=(A_xA_yB_z-A_xA_zB_y)+(A_yA_zB_x-A_yA_xB_z)+(A_zA_xB_y-A_zA_yB_x)$$

$$=(\cancel{A_xA_yB_z}-\cancel{A_yA_xB_z})+(\cancel{A_yA_zB_x}-\cancel{A_zA_yB_x})+(\cancel{A_zA_xB_y}-\cancel{A_xA_zB_y})=0$$

(방법 2) 벡터 A x B 는 벡터 A 와 B 각각에 대해 항상 수직이므로

벡터 A x B 와 벡터 A 의 스칼라곱은 항상 0 이다

(2) (벡터곱은 서로 순서를 바꾸면 반대방향이 되므로 - 가 붙게 됨을 이용하자)

$\vec{B}\times\vec{A}=\vec{C}$ 라고 놓으면

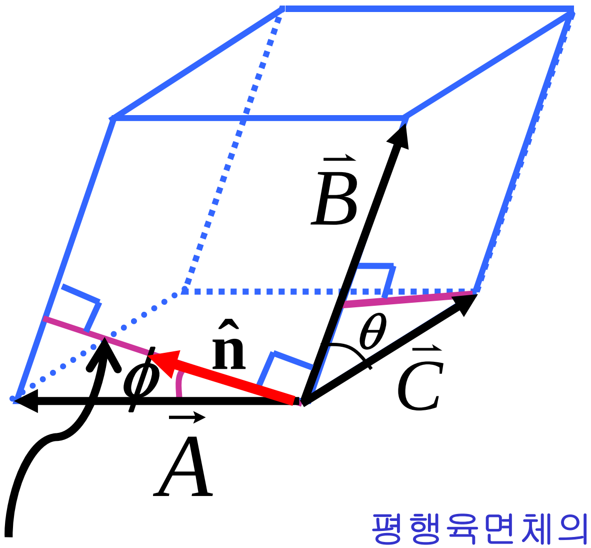
$$\left(\text{예}: \vec{A}\times\vec{C}=-\vec{C}\times\vec{A}\right)$$

$$\text{좌변}=\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)=\vec{A}\times\vec{C}=-\vec{C}\times\vec{A}=-\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)\times\vec{A}$$

$$=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{A}=\text{우변} \qquad \left(\because \vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}\right)$$

연습 2-10

아래 그림과 같이 평행육면체의 한 꼭지점을 중심으로 세 벡터 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ 를 잡을때 평행육면체의 부피는 다음과 같이 표현됨을 보여라



$A\cos\phi$

$\left(\vec{A}\cdot\hat{n} = A\cos\phi\right)$

평행육면체의 옆면적은 벡터곱 B 와 C 로 표시할 수 있다.

$$\vec{B}\times\vec{C} = BC\sin\theta\ \hat{\mathbf{n}}$$

$$BC\sin\theta\ \text{(면적)}$$

여기서 $\hat{n}$ 은 $\vec{A}$ 와 $\vec{B}$ 에 수직인 방향의 단위벡터로 빨간색 화살표 방향이다

평행육면체의 부피는 옆면적에 $\hat{\mathbf{n}}$ 방향의 높이 $A\cos\phi$ 를 곱하면 된다.

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\left(BC\sin\theta\ \hat{\mathrm{n}}\right) =$$

$$= \left(BC\sin\theta\right)\left(\vec{A}\cdot\hat{\mathrm{n}}\right) = \left(BC\sin\theta\right)\left(A\cos\phi\right)$$

$$= \text{밑면적} \times \text{높이} = \text{부피}$$

연습 2-11

크기가 같은 두 벡터 a와 b를 합한 벡터 c의 크기가 a 또는 b의 크기와 같을 때 벡터 a와 b가 이루는 사잇각은 몇도인가?

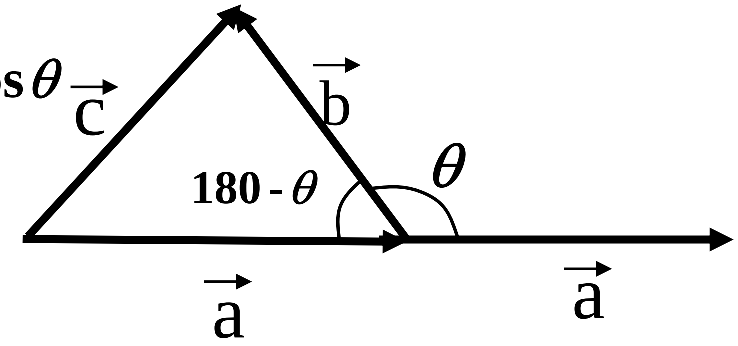
풀이

벡터 a 와 b 사이의 각은 벡터의 시작점에서 이룬 각을 말한다. 따라서 구하려는 사잇각은 θ 가 된다. 한편 세 벡터가 만든 삼각형은 정삼각형이고 정삼각형의 한 내각은 60도 이므로 180−θ = 60 도, 따라서 θ=120 도 임을 알 수 있다.

또는 스칼라곱을 이용해서 풀어 보면 다음과 같다.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \qquad \left(|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{c}|\right)$$

$$c^2=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=a^2+b^2+2ab\cos\theta$$



$$c^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta \qquad (a=b=c)$$

$$=2c^2+2c^2\cos\theta=2c^2(1+\cos\theta)$$

$$\Rightarrow 1+\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2}$$

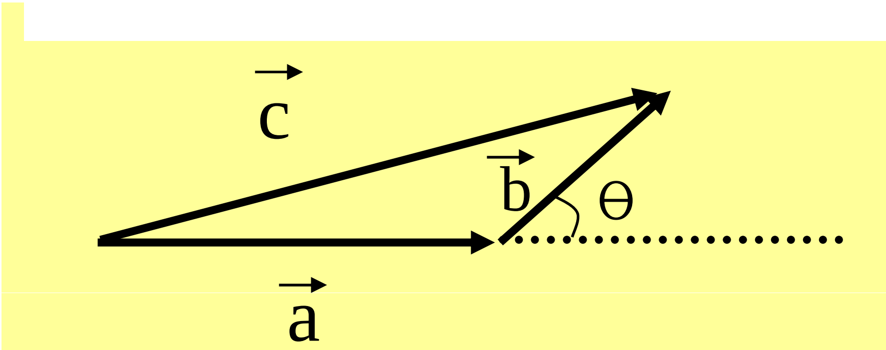
$$\therefore \theta=120°$$

Chap. 2 홈페이지 예제문제

2-1 크기가 20이고 25인 두 벡터를 합하여 얻은 벡터의 크기로 가능한 것은?

① 0 ② 3 ③ 12 ④ 47 ⑤ 50

풀이



두 벡터 a 와 b 의 크기는 같은 방향으로 합해지는 최대값과 b 가 완전히 반대 방향이 되는 최소값사이에서 만들어질 수 있다.

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$

$$= \sqrt{20^2+25^2+2\cdot 20\cdot 25\cos\theta} \qquad (-1 \le \cos\theta \le 1)$$

$$(\cos\theta = 1 \text{ 일때}) \quad a+b = 45$$

$$(\cos\theta = -1 \text{ 일때}) \quad a-b = 45$$

$$\therefore\ 5 \le |\vec{a}+\vec{b}| \le 45$$

2-3. $|\vec{A}+\vec{B}|^2 = \vec{A}^2 + \vec{B}^2$ 이다. (단, $\vec{A}$와 $\vec{B}$는 0이 아니다.)

다음 설명 중 옳은 것은?

① $\vec{A}$와 $\vec{B}$는 평행하고, 같은 방향이다.

② $\vec{A}$와 $\vec{B}$는 평행하고 반대 방향이다.

③ $\vec{A}$와 $\vec{B}$ 가 이루는 각은 60° 이다.

④ 맞는 답이 없다.

풀이

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2 = \left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 + 2AB\cos\theta$$

$$= \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2$$

$$2AB\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \qquad \left(\because \vec{A},\vec{B} \neq 0\right)$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

두 벡터 A 와 B 가 90도 가 되면 두 벡터의 합은 빗면의 크기가
되며 피타고라스 정리에 의한 답과 같음을 알 수 있다.

2-5. 두 벡터 $\vec{A}$ 와 $\vec{B}$ 는 X-Y평면상에 놓여 있다. $\vec{A}=\vec{B}$ 일 조건은?

① $A_x^2+A_y^2=B_x^2+B_y^2$ ② $A_x+A_y=B_x+B_y$

③ $A_x=B_x$ and $A_y=B_y$ ④ $\frac{A_y}{A_x}=\frac{B_y}{B_x}$

⑤ $A_x=A_y$ and $B_x=B_y$

풀이

두 벡터 A 와 B 가 같으므로 각각의 성분도 같다.

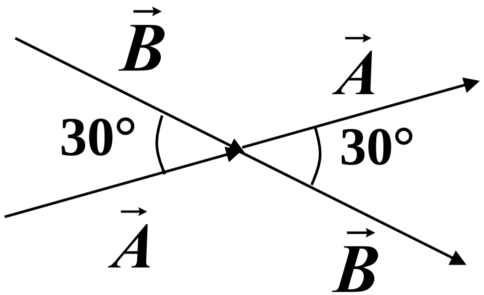
$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j},\quad \vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j},$$

$$if\quad \vec{A}=\vec{B},\quad then\quad A_x=B_x\quad and\quad A_y=B_y$$

답 : 3번

2-9 두 벡터 $\vec{A}$ 와 $\vec{B}$ 의 크기는 L 로 같다. 이 때 두 벡터의 끝이 만나도록 하였을 때 그 사잇각이 30도 라면 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 는 얼마인가?

풀이



$$\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{B}\right| = L$$

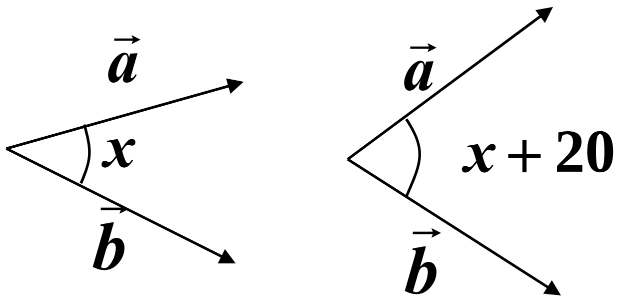
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = L^2\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}L^2$$

2-11. 같은 점에서 시작하는 두 벡터가 있다. 그 두 벡터 사이의 각을 20 ° 증가시켰을 때, 두 벡터의 스칼라곱은 크기는 같으나 양수에서 음수로 변했다. 처음 두 벡터가 이루는 각도는 얼마인가?

풀이

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos x = L$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos(x+20) = -L$$



$$ab\cos x + ab\cos(x+20) = 0$$

$$2ab\cos\left(\frac{2x+20}{2}\right)\cos\left(\frac{\cancel{x}-(\cancel{x}+20)}{2}\right) = 0$$

$$if \quad a \neq 0, \;\; b \neq 0$$

$$then \quad \cos\left(\frac{2x+20}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2x+20}{2} = 90°$$

$$\therefore \quad x = 80°$$

2-13. $\vec{R}=\vec{S}\times\vec{T}$이고 $\theta\neq 90°$ 이다. (θ 는 두 벡터 $\vec{S}$와 $\vec{T}$ 의 사잇각이다.) 다음 보기 중 틀린 것은 무엇인가?

두 벡터 S 와 T 의 벡터곱이 R 이므로 R 벡터는 S 와 T 에 항상 수직이다. 한편 S 와 T 는 서로 90도가 아니므로 이의 스칼라곱은 0 이 되지 않는다.

① $|\vec{R}|=|\vec{S}||\vec{T}|\sin\theta$　② $\vec{R}\cdot\vec{T}=0$　③ $-\vec{R}=\vec{T}\times\vec{S}$

④ $\vec{S}\cdot\vec{T}=0$　⑤ $\vec{R}\cdot\vec{S}=0$

2-14. $\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k})$의 값은 얼마인가?

$$\hat{i}\cdot\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)=\hat{i}\cdot\hat{i}=1$$

2-15. $\hat{k}\cdot(\hat{k}\times\hat{i})$ 의 값은 얼마인가?

단위벡터 I, j, k 는 x, y, z 를 의 좌표방향을 각각 나타내며 서로 수직이다. 두 벡터가 수직일 때 스칼라곱은 0 이고 벡터곱은 1 이 되는 벡터곱의 정의를 이용한다

$$\hat{k}\cdot\left(\hat{k}\times\hat{i}\right)=\hat{k}\cdot\hat{j}=0$$